CARTE NAUTICHE

Sono sempre stato attratto dalla cartografia: ogni carta ha la propria caratteristica che dipende dall'uso che uno deve farne (per esempio la carta dell'ONU o **proiezione di Gall-Peters** è un particolare tipo di proiezione della Terra su un cilindro che , per non far torto a nessun paese, conserva le aree). Indubbiamente tutte hanno la stessa proprietà che consiste nella corrispondenza biunivoca tra i punti della superficie terrestre e quelli della carta, in modo tale che dalle note coordinate di un punto della Terra si possa determinare il punto sulla carta e note le coordinate di un punto sulla carta si possa determinare il punto sulla Terra.

Per ora sono interessato a parlare delle carte che si utilizzano nella navigazione marittima pertanto, comincio dalla **proiezione cilindrica centrale** che è l'anticipatrice della carta di Mercatore.

Considero:

- la sfera terrestre di centro O e di raggio unitario per convenzione (in figura è $OA_1 = 1$),
- un cilindro retto tangente all'equatore.

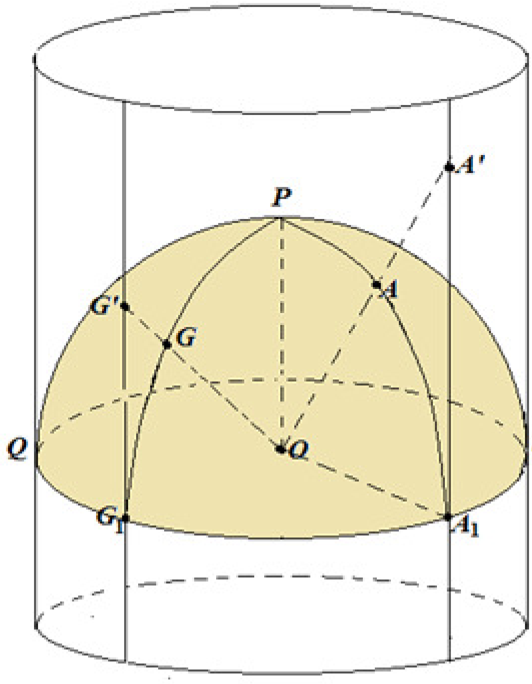

fig.1

Con punto di vista nel centro della Terra, si proiettano tutti i punti della superficie terrestre sulla superficie cilindrica: per esempio il punto G (Greenwich) va nel punto G', il punto A va nel punto A' e così via.

La carta cilindrica si ottiene sviluppando la superficie cilindrica su un piano; in essa l'equatore è rappresentato da una retta e i meridiani da rette ad esso perpendicolari e quindi tra loro parallele.

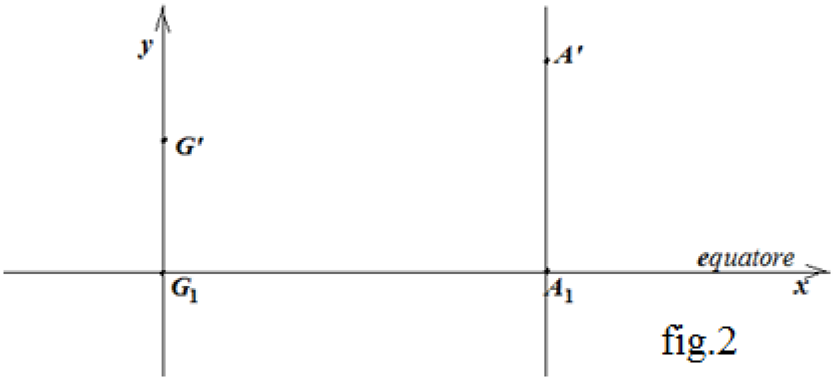

fig.2

Assunti per assi cartesiani:

____ la retta equatoriale (sviluppo dell'equatore), indicata con la lettera x,

____ la proiezione del meridiano di Greenwich, indicata con la lettera y,

è $A(x, y)$.

Voglio scrivere la relazione che hanno le coordinate cartesiane sulla carta cilindrica con le corrispondenti coordinate geografiche.

Nello sviluppo del cilindro l'equatore non subisce nessuna deformazione e quindi è:

$$x = \lambda ;$$

dal triangolo rettangolo $OA_1 A'$, essendo $A_1\hat{O}A' = \varphi$, è:

$$A_1 A' = OA_1 \cdot \tan \varphi = 1 \cdot \tan \varphi \quad \Rightarrow \quad y = \tan \varphi$$

Verifico che questa carta non è isogona; allo scopo, considero i due seguenti triangoli infinitesimi:

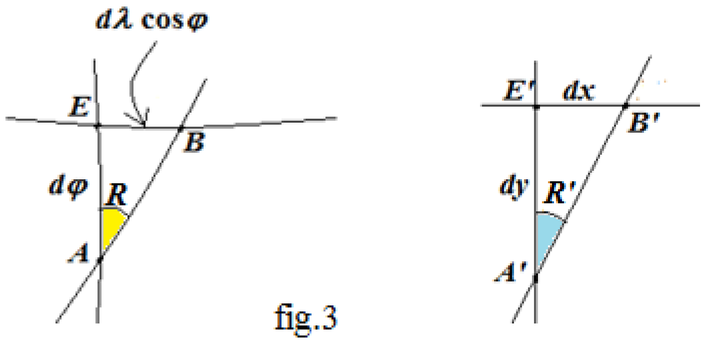

fig.3

Dal primo, sulla sfera terrestre, si ha:

$$\tan R = \frac{d\lambda \cdot \cos \varphi}{d\varphi} ; \qquad (1)$$

dal secondo, corrispondente del primo, sulla carta, essendo il differenziale $dy = d(\tan \varphi) = \dfrac{d\varphi}{\cos^2 \varphi}$.

si ha:

$$\tan R' = \frac{dx}{dy} = \frac{d\lambda \cdot \cos^2 \varphi}{d\varphi} \qquad (2)$$

Dal confronto della (1) con la (2) ottengo:

$$\tan R' = \tan R \cdot \cos \varphi . \qquad (3)$$

La (3) manifesta la non isogonia della carta cilindrica centrale tranne sull'equatore dove $\cos \varphi = 1$.

Pertanto questa carta non rettifica le lossodromie ad esclusione di quelle degeneri (equatore e meridiani).

Nasce pertanto la necessità di trovare un modo per rendere isogona la carta cilindrica; questo problema lo risolve magistralmente Keplero; ha così origine la **proiezione cilindrica centrografica modificata** o **proiezione di Mercatore**. L'idea nasce da un concetto geometrico molto semplice: imporre la similitudine dei due precedenti triangoli (purtroppo nelle scuole italiane si insegna poca geometria, anzi, addirittura non se ne insegna proprio più) :

$$\frac{E'B'}{A'E'} = \frac{EB}{AE} ,$$

dalla quale ottengo

$$\frac{dx}{d\lambda \cdot \cos \varphi} = \frac{dy}{d\varphi} ,$$

ma, essendo $dx = d\lambda$, è:

$$dy = \frac{d\varphi}{\cos \varphi} ;$$

allora confrontando i due triangoli, modificando il triangolo sulla carta, come suggerito da Keplero

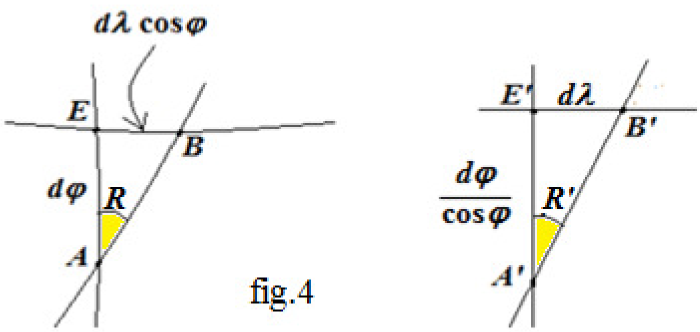

fig.4

si ha:

$$\left.\begin{aligned} \tan R &= \frac{d\lambda \cdot \cos \varphi}{d\varphi} \\ \tan R' &= \frac{d\lambda}{\dfrac{d\varphi}{\cos \varphi}} = \frac{d\lambda \cdot \cos \varphi}{d\varphi} \end{aligned}\right| \Rightarrow \tan R' = \tan R \Rightarrow R' = R$$

Ecco verificato l'isogonismo cioè la proprietà della carta di conservare inalterati gli angoli. Ma l'isogonismo vale solo per gli angoli di rotta? No, vale per tutti gli angoli indistintamente, infatti un qualunque angolo può essere considerato come differenza di due rotte, pertanto se sulla carta di Mercatore si conservano due rotte, si conserva anche la loro differenza.

Il fatto che questa carta conservi le rotte, vista la definizione della lossodromia, posso dire, senza ombra di dubbio, che la carta di Mercatore rettifica le lossodromie.

Verifico matematicamente quanto detto; è sufficiente scrivere l'equazione $\Delta\lambda = \Delta\varphi_c \cdot \tan R$ della lossodromia nel seguente modo:

$$\lambda - \lambda_0 = (\varphi_c - \varphi_{c_0}) \cdot \tan R\,, \tag{4}$$

nella quale $(\lambda_0, \varphi_{c_0})$ sono le coordinate di un prefissato punto della superficie terrestre e (λ, φ_c) sono le coordinate del punto corrente della lossodromia.

Precedentemente ho indicato con (x, y) le coordinate di un punto sulla carta, allora la (4) può scriversi:

$$y - y_0 = \cot R \cdot (x - x_0).$$

Quest'ultima è l'equazione di una retta il cui coefficiente angolare è $\cot R$.

La carta di Mercatore, rettificando le lossodromie, è la carta nautica per antonomasia, pur avendo il difetto di non poter essere usata nei pressi dei poli geografici.

OSSERVAZIONE. Il rapporto $\frac{E'B'}{AB} = \sec\varphi$ ci fa rilevare che se u è la lunghezza di 1' sulla scala uniforme delle longitudini, $u \sec\varphi$ è la lunghezza di 1' di meridiano alla latitudine φ, per esempio:

__ alla latitudine φ=60° la scala delle longitudini è 2u;

__ alla latitudine φ=80° 24' 35'' la scala delle longitudini è circa 6u.

.

Premesso che la carta di Mercatore non può rappresentare i poli e, pur potendo teoricamente rappresentare le zone limitrofe ai poli, non è idonea ad essere ivi costruita a causa delle forti dilatazioni che, in quei luoghi, subiscono le latitudini.

Il Prof. Ideale Capasso, autore di inestimabili libri di testo per i Nautici ha avuto una geniale idea per poter utilizzare, anche nelle regioni polari, la carta di Mercatore; il suo pensiero è stato quello di ridurre la scala delle latitudini crescenti senza modificare quella delle longitudini.

Assume un parallelo, detto *parallelo-base* , di latitudine φ_0 che costituisce la base della nuova scala delle latitudini crescenti.

Pertanto la costruzione della nuova carta è fondata sull'uso di due superfici sferiche:

___ una è quella della Terra, ovvero quella avente il raggio R terrestre, utilizzata a rappresentare le **sole longitudini**;

___ una di raggio $r = R\cos\varphi_0$ utilizzata per rappresentare le **sole latitudini**.

Allora, ad una unità u (per esempio un primo d'arco) sull'equatore *QQ'* della Terra corrisponderà l'unità

$$u' = u \cos \varphi_0$$

sul parallelo *qq'* di latitudine φ_0 che è anche l'equatore della **Terra ridotta** di raggio *r*.

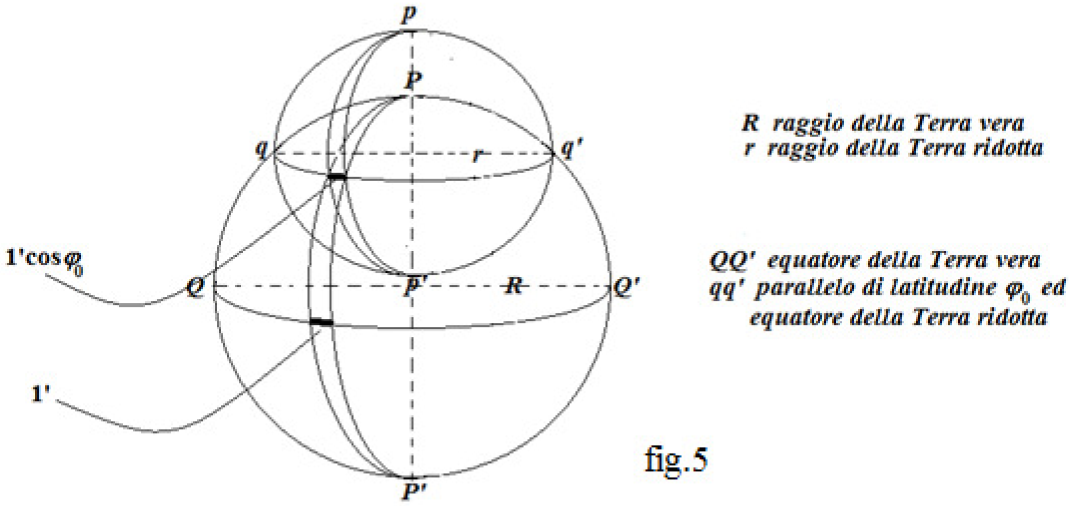

fig.5

E, qui mi permetto di dimostrare quest'ultima relazione che, oltre a dipendere da una coordinata della superficie terrestre (la latitudine dell'arco di parallelo), è conseguenza di un teorema di geometria che avrebbe dovuto studiarsi nel secondo anno di scuola media superiore.

Ed ecco la dimostrazione:

Siano *PAP'* e *PBP'* due meridiani; essi determinano sull'equatore l'arco *LM* e su un parallelo, di latitudine φ_0, l'arco *AB* (in figura, per motivi didattici, ho esagerato nell'ampiezza dell'angolo diedro formato dai due predetti meridiani).

Le **ampiezze** dei due archi sono **uguali** tra loro perché ampiezze della sezione retta dell'angolo diedro formato dai piani meridiani *PAP'* e *PBP'*

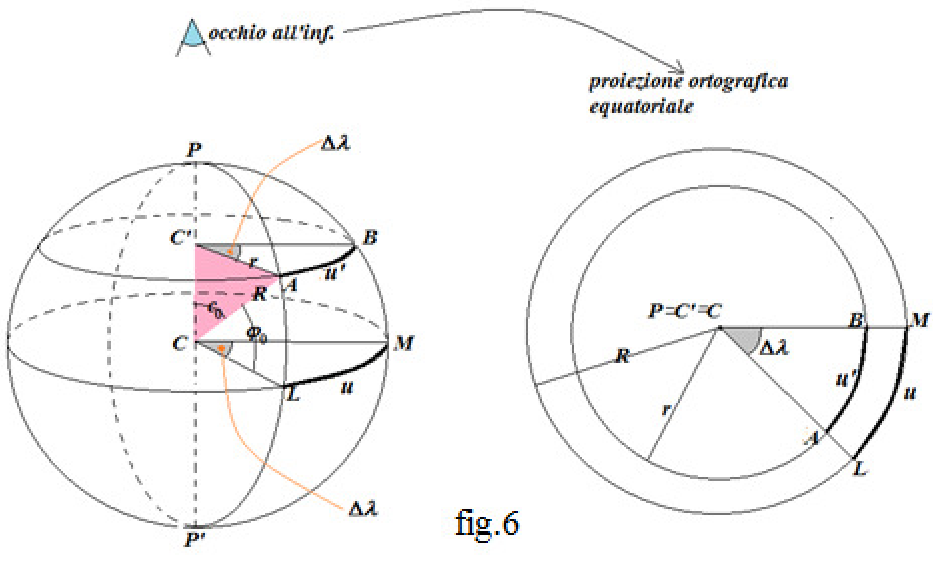

fig.6

Per contro, **non sono uguali** le **lunghezze**, espresse in una stabilita unità lineare, dei due archi.

Voglio scrivere una equazione che consenta di determinare la lunghezza di uno dei due archi conoscendo la lunghezza dell'altro.

Dalla prima figura rilevo che nel triangolo *AC'C* si ha:

- l'angolo in *C'* è retto perché il piano del parallelo è normale all'asse polare e quindi risulta perpendicolare a tale asse il lato *AC'* che è il raggio r del parallelo considerato,
- l'ipotenusa *CA* è il raggio R della superficie sferica terrestre,
- il cateto *C'A* è il raggio r del parallelo,
- l'angolo *C'CL* è la colatitudine c_0 del parallelo.

Con queste precisazioni, abbiamo:

$$r = R \sin c_0 \quad \Rightarrow \quad r = R \cos \varphi_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{r}{R} = \cos \varphi_0 \,; \qquad (5)$$

ma, dalla geometria è noto che: "*il rapporto di due archi di circonferenza simili (appartenenti a circonferenze di raggi diversi) è uguale al rapporto fra i rispettivi raggi*".

Osservando la figura in *proiezione ortografica equatoriale*, posso scrivere:

$$\frac{arco(AB)}{arco(LM)} = \frac{r}{R} \,; \qquad (6)$$

dal confronto della terza delle (5) con la (6), abbiamo:

$$\frac{arco(AB)}{arco(LM)} = \cos \varphi \,, \quad \Rightarrow \quad u' = u \cos \varphi_0 \qquad (7)$$

Torno ora alla carta di Capasso; la sfera piccola rappresenta una Terra fittizia; essa ha per equatore il parallelo di latitudine φ_0 della Terra vera, e per questo i poli della Terra fittizia sono sull'asse dei poli geografici. Avendo chiamato la sfera piccola "*Terra ridotta*", la carta corrispondente prende il nome "*carta mercatoriana ridotta*".

Indicato, sulla sfera grande, con $d\varphi$ un archetto unitario di meridiano (uguale all'archetto unitario $d\lambda$ dell'equatore) segue, per quanto detto, che il corrispondente archetto unitario sulla sfera piccola è $d\varphi \cdot \cos \varphi_0$.

Stabilito che anche sulla carta ridotta la rappresentazione degli archi di meridiano avviene secondo il procedimento delle differenze di latitudini crescenti, è:

___ un archetto $d\varphi \cdot \cos \varphi_0$, situato in latitudine φ, sulla carta ridotta, è rappresentato da un segmento

$d\varphi \cdot \cos \varphi_0 \cdot \sec \varphi$;

___ un arco compreso tra i paralleli φ e φ' è rappresentato, sulla carta ridotta, da un segmento dato da

$\int_{\varphi}^{\varphi'} \cos \varphi_0 \cdot \sec \varphi \cdot d\varphi = \cos \varphi_0 \cdot \int_{\varphi}^{\varphi'} \frac{1}{\cos \varphi} \cdot d\varphi = \Delta \varphi_c \cdot \cos \varphi_0$, nella quale $\Delta \varphi_c$ è la consueta differenza

di latitudine crescente, comunemente usata sulla carta di Mercatore.

Allora, una latitudine φ è rappresentata, sulla carta ridotta, con un segmento dato da $\varphi_c \cdot \cos \varphi_0$ per cui tutti i punti avente quella latitudine viene ravvicinata, rispetto alla sua posizione nella carta di Mercatore, nella direzione dei meridiani terrestri, verso l'equatore terrestre di un segmento pari a $\varphi_c - \varphi_c \cdot \cos \varphi_0$.

La graduazione delle latitudini sulla carta ridotta è determinata mediante le "*latitudini crescenti*" e le "*differenze di latitudini crescenti*" ottenute dalle consuete tavole nautiche, con l'accortezza di moltiplicarle per $\cos\varphi_0$. Queste lunghezze sono tanto minori quanto è più elevata la latitudine φ_0 del parallelo-base, infatti la funzione coseno è decrescente nel primo quadrante.

Costruisco:

● sui bordi inferiore e superiore della carta si costruisce:

___ una graduazione che rappresenta i gradi o i primi o altre frazioni di longitudine, sull'equatore della sfera grande, con una lunghezza $d\lambda$ scelta a seconda dell'ampiezza della zona da rappresentare; questa serve a tracciare i meridiani e rappresentare le longitudini;

___ graduazione minore che rappresenta le lunghezze $d\lambda \cdot \cos\varphi_0$ dei gradi o primi o frazioni dell'equatore della sfera piccola che può servire per la misura delle distanze sulla carta ridotta mediante le graduazioni delle latitudini.

● sui bordi laterali della carta ridotta si costruisce:

___ una graduazione che serve a tracciare i paralleli secondo i valori crescenti dei segmenti $d\varphi \cdot \cos\varphi_0 \cdot \sec\varphi$, attribuendo ai $d\varphi$ di 1° o 1' o altra frazione, le stesse lunghezze scelte per i $d\lambda$ di longitudine sull'equatore della sfera grande.

Le dimensioni in latitudine e in longitudine della carta ridotta dipendono dall'estensione della zona che si vuole rappresentare.

ESEMPIO:

Supposto che si debba rappresentare la zona individuata da $70°N \le \varphi \le 85°N \wedge 10°W \le \lambda \le 40°W$ dando alla carta la dimensione in longitudine di $1.50m = 150cm = 1500mm$, per la quale si hanno:

● lunghezze in longitudine:

___ $\Delta\lambda = 40° - 10° = 30° = 1500mm$

___ $\Delta\lambda = 1° = (1500:30)mm = 50mm$

___ $\Delta\lambda = 10' = (50:6)mm = 8.33mm$

___ $\Delta\lambda = 1' = (8.33:10)mm = 0.833mm$

che sono riportate sui bordi inferiore e superiore;

● lunghezze in latitudine ottenute come segue:

___ la dimensione della carta ridotta in latitudine si determina moltiplicando la $\Delta\varphi_c$ fra la latitudine di 70° e la latitudine di 85° moltiplicata per la lunghezza di 1' sul parallelo-base, ossia la lunghezza di 1' sull'equatore terrestre moltiplicata per $\cos\varphi_0$; e precisamente:

• assumendo $\varphi_0 = 70°$ si avrebbe su questo parallelo-base $1' = (0.833 \cdot \cos 70°)mm =$
$= (0.833 \cdot 0.342)mm \cong 0.2849mm$, e determinata la differenza delle latitudini crescenti mediante le

tavole nautiche o mediante il calcolo $\Big($è noto che $(\varphi_c)_{rad} = \int_0^{\varphi} \frac{1}{\cos\varphi} d\varphi = \ln\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$;

$(\varphi_c)' = \frac{10800}{\pi} \cdot (\varphi_c)_{rad}$ allora, per $\varphi = 70°$ è $\varphi_c = 5965.9'$ e per $\varphi = 85°$ è $\varphi_c = 10764.6'$ da cui

$\Delta\varphi_c = 10764.6 - 5965.9 = 4798.7.\Big)$, la dimensione in latitudine, della carta ridotta, diventa uguale a

$(4798.7 \cdot 0.2849)mm \cong 1367.149\ mm \cong 1.367\ m$.

OSSERVAZIONE 1. Nella carta di Mercatore la dimensione latitudine raggiunge quasi 4 metri, ottenuti dal prodotto $(4798.7 \cdot 0.833)mm \cong 3997.3mm \cong 4m$, quasi il triplo della corrispondente dimensione in latitudine della carta ridotta, pertanto ecco il grande vantaggio della carta ridotta a fronte della mercatoriana.

OSSERVAZIONE 2. Volendo dare alla carta ridotta, dell'esempio precedente, la dimensione in latitudine uguale a quella in longitudine, si devono fare alcune considerazioni, e precisamente:

- $\Delta\varphi_c$ è la differenza di latitudine crescente sulla carta di Mercatore,
- $\Delta\varphi_c \cdot \cos\varphi_0$ è la differenza di latitudine crescente sulla carta ridotta,

allora, il rapporto della seconda alla prima è:

$$\frac{\Delta\varphi_c \cdot \cos\varphi_0}{\Delta\varphi_c} = \cos\varphi_0 \qquad (8)$$

Allora, se alla carta ridotta del precedente esempio voglio dare la dimensione in latitudine uguale a quella, scelta, in longitudine, mi servo dell'equazione (8):

$$\frac{1500}{3997.3} = \cos\varphi_0 \ ,$$

dalla quale ottengo $\varphi_0 = 67° 57'.6\ N$.

Provo che la carta ridotta non è isogona; allo scopo riprendo la fig.4, apportando le modifiche al secondo triangolo per adeguarlo alla carta ridotta:

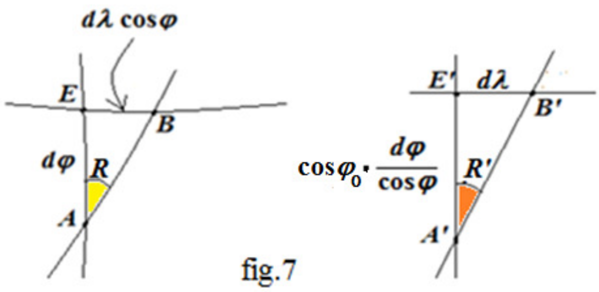

fig.7

$$\left.\begin{array}{l} \tan R = \dfrac{d\lambda \cdot \cos\varphi}{d\varphi} \\ \tan R' = \dfrac{d\lambda}{\dfrac{d\varphi}{\cos\varphi} \cdot \cos\varphi_0} = \dfrac{d\lambda \cdot \cos\varphi \cdot \sec\varphi_0}{d\varphi} \end{array}\right| \Rightarrow \tan R' = \tan R \cdot \sec\varphi_0$$

Osservo attentamente l'ultima equazione e posso affermare che:

___ per una lossodromia che incontra i meridiani sotto un angolo di rotta R, è:

$$\tan R = costante,$$

___ per un prestabilito parallelo-base con latitudine φ_0, è:

$$\sec \varphi_0 = costante,$$

per cui è anche:

$$\tan R' = costante,$$

da cui risulta costante anche l'angolo *R'*, che ci rivela che pure la carta ridotta rettifica le lossodromie.

Questa importante caratteristica consente di tracciare sulla carta ridotta la retta che passa per i punti di partenza e di arrivo, di misurare l'angolo di rotta fittizio *R'* e di calcolare con l'equazione

$$\tan R = \tan R' \cdot \cos \varphi_0$$

l'angolo di rotta lossodromica *R* che deve seguire la nave per giungere al punto di arrivo desiderato.