EQUAZIONE DEL CIRCOLO MASSIMO(di mortolacarlo)

Definizione di **geodetica**: la geodetica è una curva γ, su una superficie Γ, che rappresenta il minimo percorso congiungente due punti di quella superficie.

Se la superficie è:

- un piano, la geodetica è una retta;
- una superficie sferica, la geodetica è un circolo massimo;
- una superficie cilindrica la geodetica è l'elica;
- ecc.

Noi siamo interessati alla superfice terrestre supposta perfettamente sferica e, rispetto a questa superficie, enunciamo il teorema di Clairaut:

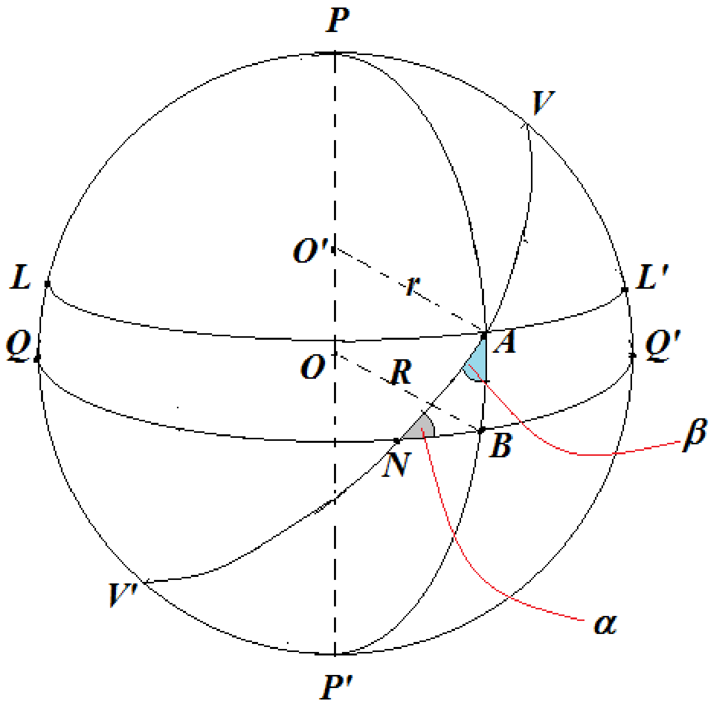
Siano:

- A_i i punti di un circolo massimo
- r_i i raggi dei loro rispettivi paralleli
- β_i gli angoli che i meridiani dei punti A_i formano col circolo massimo considerato,

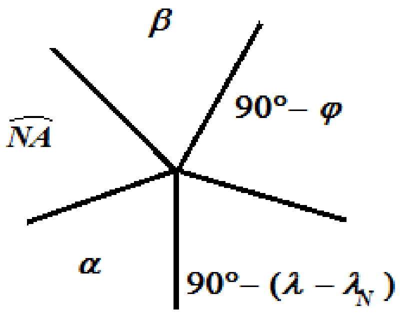
allora è:

$$r_i \cdot \sin \beta_i = \text{COSTANTE.} \qquad (1)$$

Consideriamo il punto A sul circolo massimo $V'NV$ (N è uno dei due nodi e V, V' sono i due vertici) ed il meridiano PAP'.



Si ottiene il triangolo sferico *NBA*, rettangolo in *B*; dalle regole mnemoniche di Nepero, abbiamo:



$$\cos\left[90° - (\lambda - \lambda_N)\right] = \cot\alpha \cdot \cot(90° - \varphi)$$

$$\tan\varphi = \sin(\lambda - \lambda_N) \cdot \tan\alpha \quad (2)$$

Proviamo che la (2) rappresenta l'equazione del circolo massimo *V'NV*. In essa λ_N è costante perché è la longitudine di uno dei due nodi di quel circolo massimo, in figura è il nodo *N*; dobbiamo verificare che è costante anche α.

Allo scopo, sempre per le regole mnemoniche di Nepero, scriviamo:

$$\cos\alpha = \sin(90° - \varphi) \cdot \sin\beta$$

da cui

$$\cos\alpha = \cos\varphi \cdot \sin\beta . \quad (3)$$

Tenuto conto della (1) e della relazione tra un arco di parallelo col corrispondente arco di equatore(la lunghezza di un arco di parallelo è uguale al prodotto della lunghezza del simile arco di equatore moltiplicato per il coseno della latitudine di quel parallelo), abbiamo:

$$r \cdot \sin\beta = R \cdot \cos\varphi \cdot \sin\beta = \text{COSTANTE},$$

infatti, essendo costante il primo membro deve essere costante anche il secondo, ed essendo altresì costante il raggio *R* della superficie terrestre supposta perfettamente sferica, deve essere

$$\cos\varphi \cdot \sin\beta = \text{COSTANTE},$$

ma quest'ultimo è il secondo membro della (3), pertanto è costante anche il primo membro, ovvero, per un circolo massimo è costante l'angolo α..

Pertanto la (2) è l'equazione di un circolo massimo. Essa' infatti, consente di determinare la latitudine di un qualunque punto di quel circolo massimo conoscendone la longitudine.

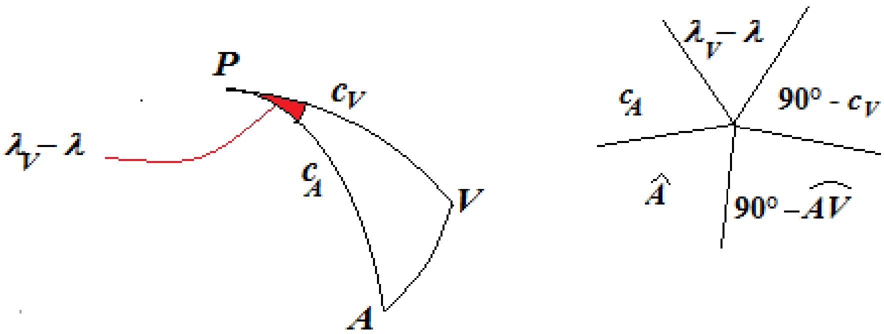
Nel caso in cui il punto A coincida col vertice V abbiamo un triangolo sferico rettangolo con angolo retto in B e rettilatero con lato retto NB, per cui è:

$$\cos 0° = \cot \alpha \cdot \tan \varphi_V \Rightarrow 1 = \cot \alpha \cdot \tan \varphi_V \Rightarrow 1 = \frac{\tan \varphi_V}{\tan \alpha} \Rightarrow\Rightarrow \varphi_V = \alpha \cdot$$

Pertanto l'equazione di un circolo massimo può essere scritta mediante i due parametri φ_V , λ_V , ovvero le coordinate di uno dei due vertici.

Queste considerazioni ci consentono di scrivere l'equazione dell'ortodromia utilizzando il triangolo ortodromico: quello che, per definizione, ha per vertici due punti del circolo massimo ed uno dei due poli geografici.

Se nella figura consideriamo il triangolo rettangolo AVP,



abbiamo

$$\cos(\lambda_v - \lambda) = \cot\varphi_V \cdot \tan\varphi \qquad (4)$$

che è l'equazione del circolo massimo, quindi di una sua qualunque restrizione(ortodromia), dove (φ , λ) sono le coordinate del punto corrente del circolo massimo di cui sono note le coordinate (φ_V , λ_v) di **uno** dei due vertici.

ESEMPIO.

Per semplificare i calcoli suppongo V (0°; 45°N), pertanto l'equazione di questo circolo massimo è

$$\cos(-\lambda) = \tan\varphi$$

ovvero

$\cos\lambda \;=\; \tan\varphi$

Prendo ora un punto A del circolo massimo avente longitudine $\lambda_A = 60°E$, la cui latitudine corrispondente proviene dall'equazione

$$0.5 = \tan\varphi_A \,,$$

per cui è $\varphi_A = 26°33'54''.18N$, ovvero:

$$A(\ 26°33'54.18''.18N;\ 60°E\ ).$$

Ora prendo un secondo punto B del circolo massimo; per comodità prendo il punto B coincidente col nodo N di longitudine $90°E$, quindi è:

$B(\ 0°;\ 90°E\ )$.

Proviamo ora che con i due punti *A* e *B* ritroviamo il vertice *V*.

Dalla (1), per la condizione di appartenenza, otteniamo:

a. per il punto A, è

   $\cos\,(\lambda_v - 60°) = \cot\varphi_V\,\tan 26°33'54''.18$ (2)

b. per il punto B, è

$\cos\,(\lambda_v - 90°) = 0$ (3)

Le (2) e (3) costituiscono un sistema nelle variabili φ_V e λ_v ; risolviamolo:

dalla (3) abbiamo:

$\lambda_v - 90° = \pm 90°$ da cui $\lambda_v = 0°$ o $\lambda_v = 180°$.

_ per $\lambda_v = 0°$, dalla (2), otteniamo:

$\cos\,(-60°) = \cot\varphi_V\,\tan 26°33'54''.18$,

$\varphi_V = 44°59'\,59''.99$ che, approssimato, porge la latitudine

$\varphi_V = 45°\,N$ del vertice assegnato;

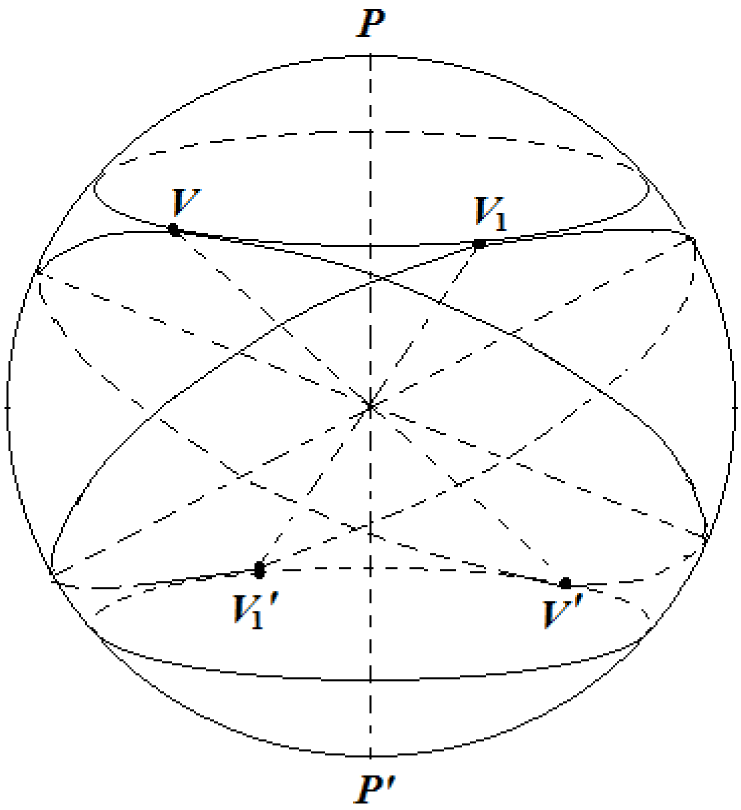
_ per $\lambda_v = 180°$, dalla (2), otteniamo:

$\cos 120° = \cot\varphi_V\,\tan 26°33'54''.18$,

$\varphi_V = -44°59'\,59''.9$ che approssimato, porge la latitudine

$\varphi_V = 45°\,S$ dell'altro vertice.

Verifichiamo graficamente (mediante una figura scenografica) che le coordinate di un vertice individuano univocamente un circolo massimo; allo scopo consideriamo la seguente figura



nella quale sono segnati due paralleli di latitudini opposte e nella fascia sferica compresa tra questi paralleli sono segnati due circoli massimi aventi i vertici sui suddetti paralleli (circoli massimi tangenti ai due sopraindicati paralleli). Allo stesso modo come si sono tracciati questi due circoli massimi, se ne possono tracciare altri, quanti ne vogliamo, infatti sono infiniti i circoli massimi aventi i vertici su una coppia di paralleli opposti. Ma, stabilita una determinata longitudine, viene ad individuarsi un **unico circolo massimo**, pertanto il numero minimo di parametri per individuare una circonferenza massima è due: le coordinate di **uno** dei suoi vertici.