Una dimostrazione attribuita ad Isacco Newton sulla seconda legge di Keplero, mediante l'uso della geometria euclidea.

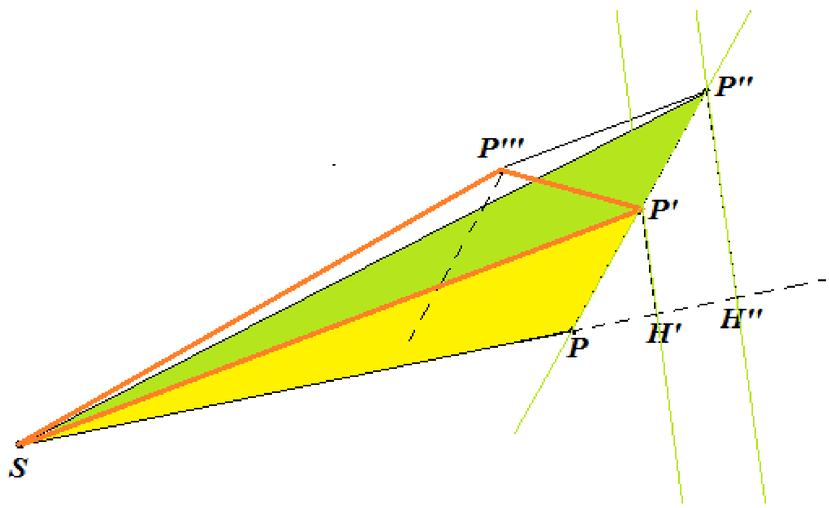
La seconda legge di Keplero recita.

"I raggi vettori (*distanza euclidea pianeta-Sole*) *descrivono aree uguali in tempi uguali."*

Dimostrazione

Ora supponiamo che il pianeta dalla posizione *P* descriva un tratto *PP'* in un tempo *t*; se non intervengono forze esterne, per il primo principio del moto (un corpo persiste nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme fino a che non intervengano forze esterne), nello stesso tempo *t* percorrerebbe un ulteriore tratto *P'P''*, adiacente a *PP'* e ad esso uguale.

Ma, per la legge di gravitazione universale, in *P'* agisce una forza centrale (diretta verso il Sole, quindi nel senso *P'S*) che fa deviare la traiettoria del pianeta tal da fargli percorrere il tratto *P'P'''* al posto di *P'P''*.



Osserviamo attentamente la figura: in essa per i triangoli *SPP'* e *SPP''* sussiste la relazione:

$$Area(SPP'') = 2\,Area(SPP');$$

infatti i due triangoli hanno ugual base *SP* ed altezza rispettivamente $H'P' = \frac{1}{2} H''P''$ (ciò in virtù di una conseguenza del teorema di Talete).

Segue:

[*triangolo* (*SPP'*)] ***equivalente*** [*triangolo* (*SP'P''*)] (1)

Consideriamo ora i triangoli *SP'P''* e *SP'P'''*; essi hanno ugual base *SP'* ed uguale altezza (distanza tra le rette parallele *SP'* e *P'''P''*, dovuta alla legge della composizione degli spostamenti); pertanto è:

[*triangolo* (*SP'P''*)] ***equivalente*** [*triangolo* (*SP'P'''*)]. (2)

Dalle (1) e (2), per la proprietà transitiva dell'equivalenza è:

[*triangolo* (*SPP'''*)] ***equivalente*** [*triangolo* (*SPP'*)]

che è ciò che volevamo dimostrare.

OSSERVAZIONE 1. Le leggi di Keplero (come tutte le altre della meccanica celeste) hanno qualcosa di *mistico* e di *miracoloso*, che l'uomo non può modificare; per assurdo (o forse no) se l'uomo mandasse in frantumi il proprio pianeta modificherebbe solamente l'equilibrio del sistema solare ma, assolutamente, non le leggi che determinano il movimento dei pianeti restanti.

OSSERVAZIONE 2. Se le orbite dei pianeti attorno al sole fossero circolari, la velocità di ciascun pianeta sarebbe costante (ad archi uguali corrispondono settori circolare uguali); ma, essendo le orbite ellittiche con il Sole situato in uno dei fuochi (quale dei due?), i pianeti hanno velocità variabile: più lenta nei pressi dell'afelio e più marcata nei pressi del perielio; questa variazione di velocità è dovuta alla forza di attrazione universale che è proporzionale all'inverso del quadrato della distanza istantanea pianeta-Sole; pertanto si ha un continuo equilibrio del movimento del pianeta che gli consente di descrivere la propria orbita attorno al Sole: non si tratta di un miracolo?

Assumendomi la libertà di formulare la seconda legge di Keplero nella forma in cui si enunciano taluni teoremi della geometria euclidea, come per esempio:

"*un triangolo ha due lati uguali **se e solo se** ha due angoli uguali*",

posso scrivere:

"*il raggio vettore descrive aree uguali in tempi uguali **se e solo se** esiste una forza centripeta* (*centrale*) *che il Sole esercita sul pianeta*".

In questo modo ho espresso la seconda legge in forma di teorema.

L'**andata** (diciamo così) è stata dimostrata precedentemente.

Per il **ritorno** la dimostrazione è la seguente:

stabilito che sia vera la prima parte "*il raggio vettore descrive aree uguali in tempi uguali*", ovvero che il triangolo *SP'P'''* (in fig. triangolo con contorno rosso) sia equivalente al triangolo *SPP'* (in fig. triangolo colorato di giallo), segue che i due suddetti triangoli, avendo la stessa area e stessa base *SP'*, devono avere uguale altezza; così *SP'* e *P'''P''* risultano paralleli, per cui la forza che agisce sul pianeta quando è nella posizione *P''* è centrale ovvero nel senso che va dal pianeta al Sole.