PARADOSSI GEOMETRICI (di mortola carlo)

1° UN PARADOSSO SULLA SUPERFICIE SFERICA

Definizione di **lossodromia:** curva gobba o sghemba che taglia con angolo costante tutti i meridiani che incontra; tale angolo è chiamato rotta vera ed è indicata con la lettera *R*. [*una curva nello spazio è detta* ***piana*** *se giace tutta su un piano oppure è detta* ***gobba*** *o* ***sghemba*** *se non esiste nessun piano che la contenga*]

Etimologicamente deriva dal greco mediante la composizione della parola *loxòs* = *obliquo* e della parola *dromòs =corsa*, ovvero *loxodrómos = correre obliquamente.* E' detta anche *rombo obliquo* che significa *percorso obliquo* ovvero il percorso che compie una nave seguendo lo stesso *rombo di vento*.

Storicamente lo scopritore di questa linea fu il matematico e cosmografo portoghese **Pedro Nunes (1492-1577),** latinizzato *Petrus Nonius,* che nel 1542 riconobbe per primo che la traiettoria di una nave, la quale tagli sotto un angolo acuto costante i meridiani che incontra, è una curva gobba, chiamata successivamente, da Snel, *lossodromia.*

Willebrord Snel van Royen (1580-1626), latinizzato Willebrordus Snellius o semplicemente Snellius, era matematico, astronomo e fisico olandese.

Osservazione. Tutti gli scienziati di quel periodo avevano nomi latinizzati perché era il latino la lingua internazionale della scienza e della ricerca. Mia opinione: come sarebbe bello se non si fosse fatta morire questa lingua classica e si fosse continuata a studiare nelle scuole europee coniando le nuove parole che, di volta in volta, erano necessarie per tenerla viva ed attuale ……

Sulla superficie terrestre supposta sferica, siano $A(\varphi_A, \lambda_A)$ il punto di partenza, *R* la rotta lossodromica ed *m* il cammino percorso da una nave; si vuole determinare il punto $B(\varphi_B, \lambda_B)$ di arrivo.

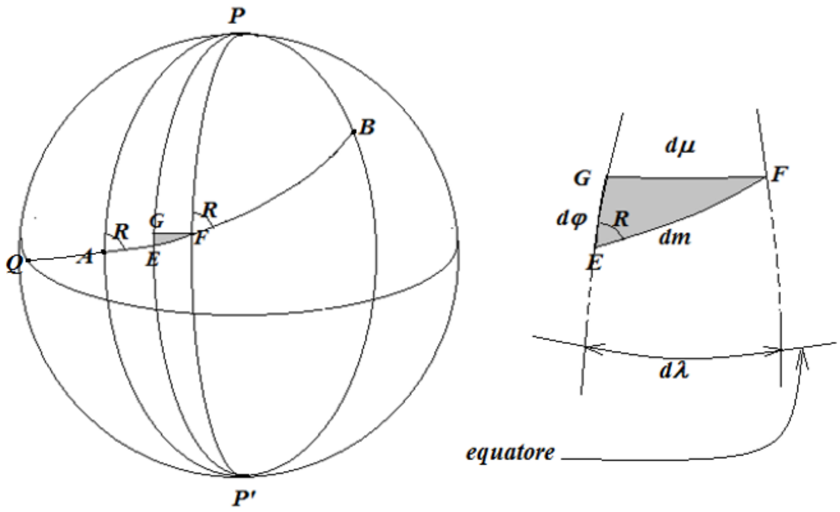
Come è noto, è:

$$\varphi_B = \varphi_A + \Delta\varphi \qquad \textit{algebrica}$$

$$\lambda_B = \lambda_A + \Delta\lambda, \qquad \textit{algebrica}$$

per cui il problema si riduce a determinare $\Delta\varphi$ e $\Delta\lambda$.

Allo scopo ci riferiamo alla seguente figura in cui *AB* è l'arco lossodromico da percorrere.



Presi su di essa due punti E ed F molto vicini tale da poter considerare infinitesimo l'arco EF e, tracciato il parallelo FG, dal triangolo rettangolo EFG, considerato piano per avere i lati infinitesimi, abbiamo:

$$d\varphi = dm \cos R$$

da cui, per integrazione definita $\int_{\varphi_A}^{\varphi_B} d\varphi = \cos R \cdot \int_A^B dm$, otteniamo:

$$\Delta\varphi = m \cos R. \qquad (1)$$

Ancora abbiamo:

- dal triangolo rettangolo EFG :

$$d\mu = d\varphi \tan R \qquad (2)$$

- dalla relazione tra l'arco di parallelo GF con il corrispondente arco di equatore :

$$d\mu = d\lambda \cos\varphi \qquad (3)$$

dove φ è la latitudine del parallelo di F.

Eguagliamo i secondi membri delle (2) e (3)

$$d\lambda \cos\varphi \quad = \quad d\varphi \tan R$$

e risolviamo rispetto a $d\lambda$:

$$d\lambda = \tan R \cdot \frac{d\varphi}{\cos\varphi}$$

e, per integrazione definita:

$$\int_{\lambda_A}^{\lambda_B} d\lambda = \tan R \cdot \int_{\varphi_A}^{\varphi_B} \frac{d\varphi}{\cos\varphi}$$

e, considerato l'arco lossodromico AB quale differenza tra i due archi lossodromici QB e QA (Q è il punto di incontro della lossodromia considerata con l'equatore), per un noto teorema sugli integrali definiti, abbiamo:

$$\Delta\lambda = \tan R \cdot \left[\int_0^{\varphi_B} \frac{d\varphi}{\cos\varphi} - \int_0^{\varphi_A} \frac{d\varphi}{\cos\varphi} \right]$$

che scriviamo

$$\Delta\lambda = (\varphi_{c_B} - \varphi_{c_A}) \tan R \quad . \qquad (4)$$

nella quale φ_{c_A} e φ_{c_B} sono dette, rispettivamente, **latitudini crescenti** del punto di partenza *A* e di quello di arrivo *B*, cioè abbiamo posto:

$$\varphi_{c_A} = \int_0^{\varphi_A} \frac{d\varphi}{\cos\varphi} \qquad (5)$$

$$\varphi_{c_B} = \int_0^{\varphi_B} \frac{d\varphi}{\cos\varphi} \qquad (6)$$

Mediante integrazione indefinita integriamo, col metodo di sostituzione, la funzione $\dfrac{d\varphi}{\cos\varphi}$, utilizzando la colatitudine:

$$c = 90° - \varphi \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} per \quad sostituzione: \quad \cos\varphi = \cos(90° - c) = \sin c \\ differenziando: \quad dc = -d\varphi \;\Rightarrow\; d\varphi = -dc \end{array} \right. ;$$

con queste posizioni otteniamo:

$$\int \frac{d\varphi}{\cos\varphi} = -\int \frac{dc}{\sin c} = \left[\textit{per la formula di duplicazione del "seno"}\right] = -\int \frac{dc}{2\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}} = -\int \frac{d\,\frac{c}{2}}{\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}}$$

=

$$= \left[\textit{moltiplicando numeratore e denominatore per } \cos\frac{c}{2}\right] = -\int \frac{1}{\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}} \cdot \frac{\cos\frac{c}{2}}{\cos\frac{c}{2}} \cdot d\,\frac{c}{2} =$$

$$= -\int \frac{1}{\tan\frac{c}{2}\cos^2\frac{c}{2}} \cdot d\,\frac{c}{2} = \left[\textit{ricordando la derivata della funzione } y = \ln\tan f(x)\right] =$$

$$= -\ln\tan\frac{c}{2} + k\,, \qquad (7)$$

dove k è la costante additiva nell'integrazione indefinita.

Ora effettuiamo alcuni "*virtuosismi*" al fine di scrivere la (7) in funzione della latitudine, e precisamente:

$$-\ln\tan\frac{c}{2} + k = \ln\left(\tan\frac{c}{2}\right)^{-1} + k = \ln\left(\frac{1}{\tan\frac{c}{2}}\right) + K = \ln\cot\frac{c}{2} + k = \left[\textit{essendo}\right.$$

$$\left. c = 90° - \varphi \Rightarrow \frac{c}{2} = \frac{90° - \varphi}{2} \Rightarrow \frac{c}{2} = 45° - \frac{\varphi}{2}\right] = \ln\cot\left(45° - \frac{\varphi}{2}\right) + k =$$

$$\left[\textit{per una relazione sugli archi complementari}\right] = \ln\tan\left[90° - \left(45° - \frac{\varphi}{2}\right)\right] + k =$$

$$= \ln\tan\left(45° + \frac{\varphi}{2}\right) + k\,. \qquad (8)$$

Pertanto, in virtù della (8), le (5) e (6) diventano:

$$\varphi_{c_A} = \int_0^{\varphi_A} \frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \ln\tan\left(45° + \frac{\varphi_A}{2}\right),$$

$$\varphi_{c_B} = \int_0^{\varphi_B} \frac{d\varphi}{\cos\varphi} = \ln\tan\left(45° + \frac{\varphi_B}{2}\right),$$

dalle quali la (4) si trasforma in:

$$\Delta\lambda = \left[\ln\tan\left(45° + \frac{\varphi_B}{2}\right) - \ln\tan\left(45° + \frac{\varphi_A}{2}\right)\right]\tan R =$$

$\Big[$ e *per il teorema del logaritmo di un rapporto* $\Big]$ $= \ln\frac{\tan\left(45° + \frac{\varphi_B}{2}\right)}{\tan\left(45° + \frac{\varphi_A}{2}\right)} \cdot \tan R$

Ora, volendo $\Delta\lambda$ espresso in gradi sessagesimali, apportiamo il fattore correttivo $\frac{180°}{\pi}$, così che, abbiamo:

$$\Delta\lambda = \frac{180°}{\pi}\ln\frac{\tan\left(45° + \frac{\varphi_B}{2}\right)}{\tan\left(45° + \frac{\varphi_A}{2}\right)} \cdot \tan R \,.$$

Supponiamo ora che il punto di arrivo *B* sia molto prossimo ad un polo, per esempio il Polo Nord che indichiamo semplicemente con la lettera P; pensiamo, cioè, ad una nave che parta da un punto A qualunque avente rotta nel primo o quarto quadrante; cosa succede se facciamo tendere il punto B al punto *P*?

Dal teorema del limite di una funzione moltiplicata per una costante, abbiamo:

$$\lim_{B\to P}\Delta\lambda = \frac{180°}{\pi}\cdot\tan R\cdot\lim_{\varphi_B\to 90°}\ln\frac{\tan\left(45° + \frac{\varphi_B}{2}\right)}{\tan\left(45° + \frac{\varphi_A}{2}\right)} = +\infty,$$

infatti, per $\varphi_B \to 90° \Rightarrow \tan\left(45° + \frac{\varphi_B}{2}\right) \to +\infty$ ed il logaritmo, con base maggiore di 1, di un argomento che tende a +∞, tende a sua volta a +∞.

Calcoliamo ora il cammino; esso si ottiene dall'equazione (1) risolta rispetto ad m:

$$m = \frac{\Delta\varphi}{\cos R}\cdot 60\,,$$

che abbiamo moltiplicato per 60 al fine di ottenere il cammino espresso in miglia; per comodità la scriviamo come segue:

$$m = \frac{\varphi_B - \varphi_A}{\cos R}\cdot 60\,,$$

e ne facciamo il limite per $B \to P$:

$$\lim_{B\to P} m = \lim_{\varphi_B \to 90^\circ} \frac{\varphi_B - \varphi_A}{\cos R} \cdot 60 = \frac{90^\circ - \varphi_A}{\cos R} \cdot 60\,,$$

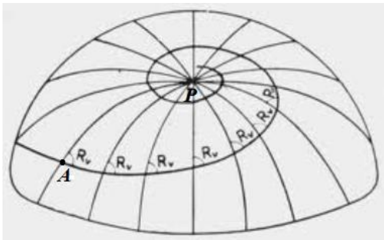
che è un valore finito.

ESEMPIO. Sia $\varphi = 30^\circ N$ la latitudine del punto di partenza A e sia $R = 45°$ la rotta seguita dalla nave; allora il cammino m per giungere al Polo Nord avrebbe, come visto, per limite:

$$m = \frac{\Delta\varphi}{\cos R} \cdot 60 = \frac{90^\circ - 30^\circ}{\cos 45^\circ} \cdot 60 = \frac{60^\circ}{1} \cdot 60 = 3600' = 3600 mg\ ,$$

mentre, **paradossalmente**, come prima detto, la variazione di longitudine tende ad infinito.

Questo ci dice che la lossodromia si avvolge indefinitamente attorno al polo di cui il polo stesso ne è l'asintoto.



Non dobbiamo meravigliarci di questo, perché una nave che percorre un tratto di questa spirale facendo più volte il giro del globo, alla fine, la sua variazione di longitudine sarà, come teoricamente è definita, minore di 180° con nome *Est* od *Ovest.* Per esempio sia la variazione di longitudine $\Delta\lambda = 2000°E$, allora è $\Delta\lambda$ = (5 · 360° + 200°)E = 200°E = (360° – 200°)W = 160°W. Ciò si verifica per la peculiarità della geometria della circonferenza percorsa positivamente in un senso o nell'altro, come avviene, nella geometria goniometrica e nella geometria dell'orologio.

OSSERVAZIONE 1. Al limite finito dell'espressione del cammino, per $\varphi_B \to 90^\circ$, corrisponderà un limite finito del tempo necessario a percorrere quel cammino (dipendente dalla velocità della nave); ma, queste considerazioni sono puramente teoriche perché sarebbero accettabili solo per una nave considerata **puntiforme**.

OSSERVAZIONE 2. Nel procedimento adottato per l'integrazione emerge che risulta agevole l'integrazione del reciproco del seno a fronte del reciproco del coseno; è per questa ragione che abbiamo utilizzato la colatitudine perché complementare della latitudine; si poteva procedere mantenendo la latitudine ricordando le relazioni goniometriche che legano angoli che differiscono dell'angolo retto, e precisamente:

$$\int \frac{1}{\cos\varphi} d\varphi = \int \frac{1}{\sin(90^\circ + \varphi)} d\varphi = \int \frac{1}{2\sin\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)\cos\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)} =$$

$$= \int \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\cos^2\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\tan\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right)} \right) dx \quad = \ln\tan\left(45^\circ + \frac{\varphi}{2}\right) + k\ ,$$

che è la (6).

L'ultima integrazione è avvenuta in virtù della seguente regola di integrazione del logaritmo di una funzione:

$$\int f'(x)\cdot\frac{1}{f(x)}\,dx=\ln\left|f(x)\right|+k$$

Oppure si poteva ricorrere ad un manuale di integrazione da cui, prescindendo dalla costante additiva, avremmo copiato la "*formula*"

$$\int\frac{1}{\cos(ax+n)}\,dx=\frac{\ln\cos(ax+b)}{a}-\frac{\ln(1-\sin(ax+b))}{a};$$

che, nel nostro caso , essendo $a=1$ e $b=0$, diventa:

$$\int\frac{1}{\cos x}\,dx=\ln\cos x-\ln(1-\sin x)=\ln\frac{\cos x}{1-\sin x}=$$

mediante le formule parametriche

$$\int\frac{1}{\cos x}\,dx=\ln\frac{\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}{1-\dfrac{2t}{1+t^2}}=\ldots=\ln\frac{1+t}{1-t}=\ln\frac{1+\tan\dfrac{x}{2}}{1-\tan\dfrac{x}{2}}=\ln\frac{\tan 45°+\tan 45°\tan\dfrac{x}{2}}{\tan 45°-\tan 45°\tan\dfrac{x}{2}}=$$

$$=\ln\tan\left(45°+\frac{x}{2}\right),$$

che, sostituendovi la lettera φ alla lettera x e addizionandovi la costante k, è la (6).

2° UN PARADOSSO SULLA SUPERFICIE PIANA

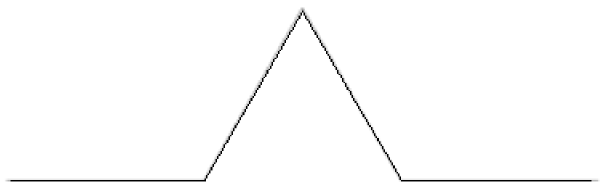
Un paradosso si rileva nella curva di Helge von Koch, (matematico svedese 1870 – 1924), detta **stella** o **isola** di **Koch.**

Essa si genera da un triangolo equilatero di assegnato lato, mediante l' esecuzione di un procedimento ricorsivo e precisamente:

1. si divide ciascun lato del triangolo in tre segmenti uguali;

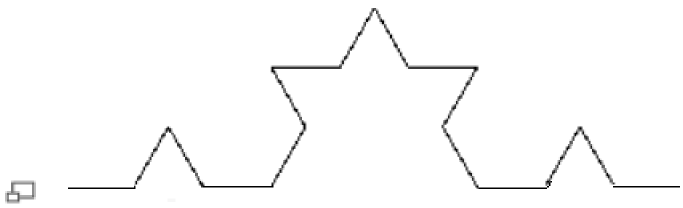
2. si cancella il segmento centrale,

3. si costruiscono due segmenti uguali a ciascuna delle due parti rimaste, come segue

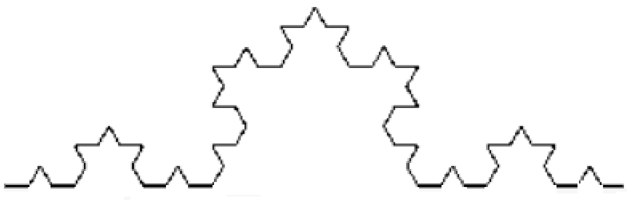


4. si ricominciano le istruzioni 1. , 2. , 3. su ciascuno dei quattro segmenti prima ottenuti.

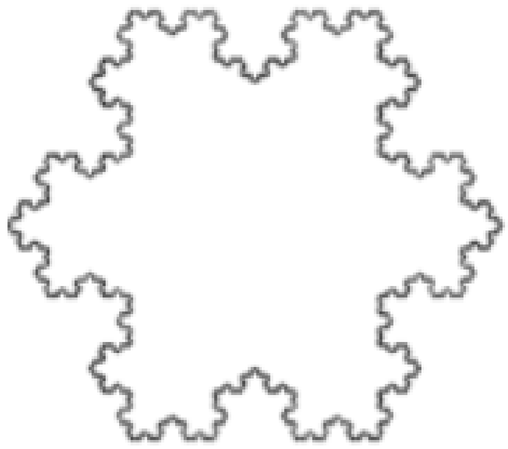
Quindi, con il secondo ciclo, si ottiene



e, con il terzo ciclo, si ottiene



E, così di seguito, per esempio al quarto ciclo, il triangolo originario si trasforma come nella seguente figura:



Ora studiamo la **stella** di Koch sia dal punto di vista del **contorno** (perimetro) che dell'**estensione** .

Per quanto concerne il perimetro, rileviamo:

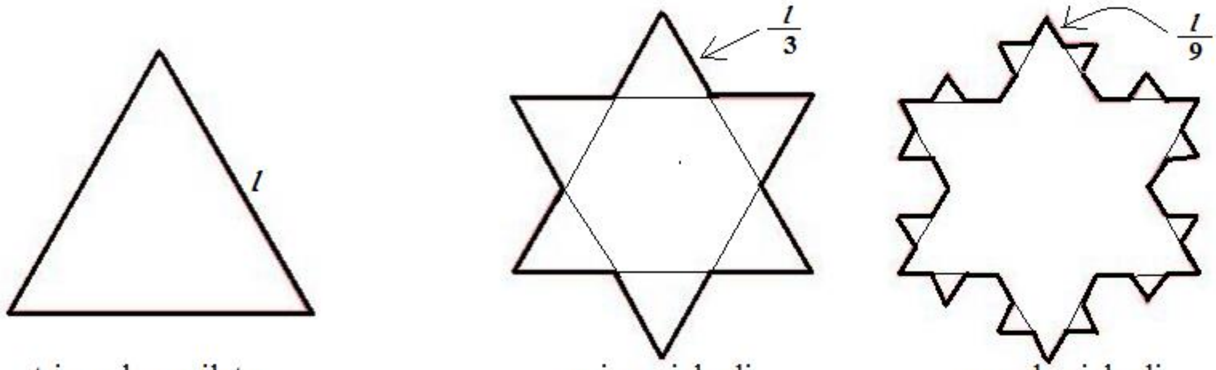
- nel primo ciclo di istruzioni si determina una spezzata formata da $\mathbf{4 = 4^1}$ segmenti per ogni lato del triangolo,
- nel secondo ciclo si determina una spezzata formata da $\mathbf{4 \cdot 4 = 4^2 = 16}$ segmenti,

- nel terzo ciclo si determina una spezzata formata da **4·4·4 = 4^3 = 64** segmenti,
- e così di seguito: al *k-esimo* ciclo la spezzata è formata da **4^k** segmenti**.**

Così che, continuando i cicli di istruzioni, il perimetro delle figure che si susseguono aumenta indefinitamente, infatti il perimetro di ciascuna figura aumenta di $\frac{4}{3}$ il perimetro della figura precedente.

Per quanto riguarda l'**area** le cose sono un po' diverse.

Infatti, indicando con l il lato del triangolo equilatero dato, con riferimento alla seguente figura e indicando con S_k ($k = 0, 1, 2, 3, 4, \ldots.$) , le aree delle figure che si susseguono, in virtù dell'iterazione, a partire dal triangolo iniziale,



triangolo equilatero assegnato — primo ciclo di istuzioni — secondo ciclo di istruzioni

abbiamo:

- $S_0 = \frac{l}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} l = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2$
- $S_1 = S_0 +$ 3 triangoli di lato $\frac{l}{3}$ $= \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 + 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{l}{3}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 \left(1 + \frac{3}{9}\right)$
- $S_2 = S_1 +$ 12 triangoli di lato $\frac{l}{9}$ $= \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 \left(1 + \frac{3}{9}\right) + 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{l}{9}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 \left(1 + \frac{3}{9} + \frac{3 \cdot 4}{9^2}\right)$
- $S_3 = S_2 +$ 48 triangoli di lato $\frac{l}{27} = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 \left(1 + \frac{3}{9} + \frac{3 \cdot 4}{9^2}\right) + 48 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{l}{27}\right)^2 =$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 \left(1 + \frac{3}{9} + \frac{3 \cdot 4}{9^2} + \frac{3 \cdot 4^2}{9^3}\right)$$

Attenzione! La forma con cui abbiamo espresso le aree ci serve al fine di poter scrivere facilmente l'area della figura che si ottiene al passo *k-esimo*, e precisamente:

- $$S_k = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 \left(1 + \underbrace{\frac{3}{9} + \frac{3 \cdot 4}{9^2} + \frac{3 \cdot 4^2}{9^3} + ... + \frac{3 \cdot 4^{k-1}}{9^k}}_{k \text{ termini in progressione geometrica di primo termine } \frac{3}{9} \text{ e ragione } \frac{4}{9}} \right)$$

Ricordiamo alcune proprietà delle progressioni geometriche, avendo indicato con a_1 il primo termine e con q la ragione:

1. la somma dei primi n termini è $s_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$;
2. la progressione geometrica, con ragione q minore di 1 ($0< q< 1$), converge (infatti se n tende ad infinito la potenza q^n tende a zero);
3. in virtù della proprietà **2.** , si ha $\lim\limits_{n \to +\infty} s_n = a_1 \cdot \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1-q^n}{1-q} = a_1 \cdot \frac{1}{1-q}$.

Per quanto detto, l'area *k-esima* si può scrivere:

$$S_k = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 \left(1 + \sum_{i=1}^{k} \frac{3 \cdot 4^{i-1}}{9^k} \right);$$

vediamo cosa succede quando k tende ad infinito:

$$\lim_{k \to +\infty} S_k = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 \left(1 + \frac{3}{9} \cdot \frac{1}{1 - \frac{4}{9}} \right) = \frac{\sqrt{3}}{4} l^2 \left(1 + \frac{3}{5} \right) = \frac{2\sqrt{3}}{5} l^2 .$$

Pertanto l'area tende ad un numero finito, da cui il **paradosso**: *mentre l'area di questa figura limitata converge, il perimetro diverge* (invitiamo il lettore ad interessarsi della geometria dei frattali) .

SPIGOLATURA. Ci venga chiesto di misurare la lunghezza delle coste italiane; per rispondere alla domanda posta, possiamo operare come segue:

forniamoci di una carta geografica, in una assegnata scala, dell'Italia e:

- contiamo quante volte un segmento che rappresenti, in quella scala, una lunghezza di 100 *Km*, ricopra tutta la costa; ne conteremo circa 50, pertanto possiamo dedurre che la lunghezza delle coste italiane sia, approssimata per difetto, $50 \cdot 100 Km = 5000 Km$;
- se il segmento ha una lunghezza di 10 *Km*, ne conteremo circa 540, pertanto possiamo dedurre che la lunghezza delle coste italiane sia, approssimata per difetto, $540 \cdot 10 Km = 5400 Km$;

- se il segmento ha una lunghezza di 1 *Km*, ne conteremo circa 6000, pertanto possiamo dedurre che la lunghezza delle coste italiane sia, approssimata per difetto, $6000 \cdot 1Km = 6000Km$;

continuando con questo procedimento, ovvero facendo diminuire la misura del segmento che deve ricoprire il perimetro marino dell'Italia, otterremmo che tale perimetro cresce indefinitamente.

Possiamo pertanto concludere che le coste possono rappresentare un esempio concreto di geometria dei frattali.