STORIA (di mortola carlo)

Risulta indubbiamente difficile trattare storicamente, in modo distinto, la storia della geometria sferica e quella della trigonometria; però, allo scopo di non accavallare troppi argomenti, tratterò le due discipline separatamente pur dovendo alcune volte citare la parola trigonometria nella storia della geometria sferica e viceversa.

STORIA DELLA SFERA(e qualche cenno di astronomia)

► La superficie sferica fu utilizzata, fin dalla più lontana antichità, come area di costruzioni grafiche per esigenze astronomiche.

► **Archimede di Siracusa** (287 a.C.- 212 a.C.) è il più famoso matematico dell'antichità ed uno dei più grandi di tutti i tempi (è uso affermare che Archimede, Newton e Gauss formano la triade dei principi della matematica). Si può considerare un matematico moderno perché anticipatore di metodi normalmente utilizzati da matematici che lo seguono nel tempo di circa duemila anni.
Fece studi approfonditi sulla sfera e sul cilindro, scrivendo su queste due figure dello spazio tridimensionale un'opera in due tomi. Tra l'altro dimostrò che:

- *la superficie della sfera è equivalente a quattro volte la superficie del suo circolo massimo*;
- *il volume della sfera è equivalente ai due terzi di quello del cilindro ad essa circoscritto.*

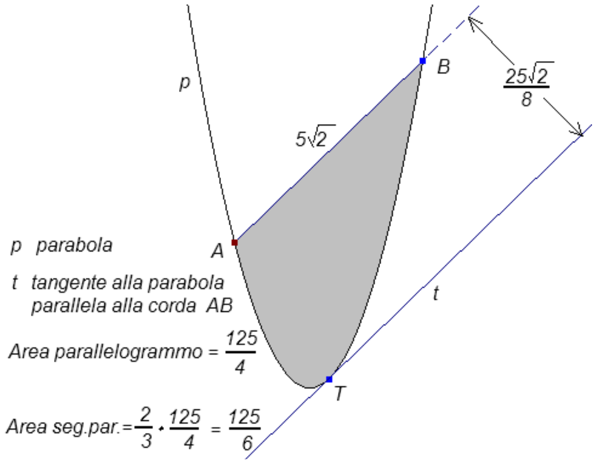
Rimase così orgoglioso di questi risultati da voler un epitaffio , sulla sua tomba , che ricordasse queste due proprietà.
Notorio è il ***teorema di Archimede***, il cui enunciato originale è:

"la parte di piano delimitata da un arco di parabola (quadratica) *e da una sua corda è equivalente ai* $\frac{4}{3}$ *del triangolo avente per base quella corda e per vertice opposto il punto dove la tangente è parallela alla corda stessa".*

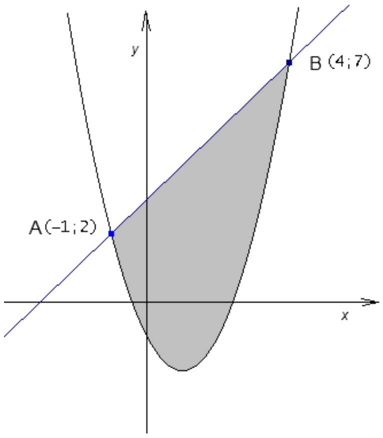
Questo teorema è oggi enunciato come segue.
"L'area di un segmento parabolico è equivalente ai $\frac{2}{3}$ *dell'area del parallelogrammo ad esso circoscritto".*

ESEMPIO

Mediante i dati letti nella figura, abbiamo: *Area segmento parabolico* = $\frac{125}{6}$



Confermiamo il risultato, col calcolo integrale



In un conveniente sistema di assi cartesiani è:

- equazione parabola $y = x^2 - 2x - 1$
- equazione corda $y = x + 3$
- coordinate punti di intersezione $A(-1;2)$, $B(4;7)$

Mediante l'uso del calcolo integrale, è:

$$\text{Area seg.par.} = \int_{-1}^{4} \left(x + 3 - \left(x^2 - 2\cdot x - 1\right)\right) dx =$$

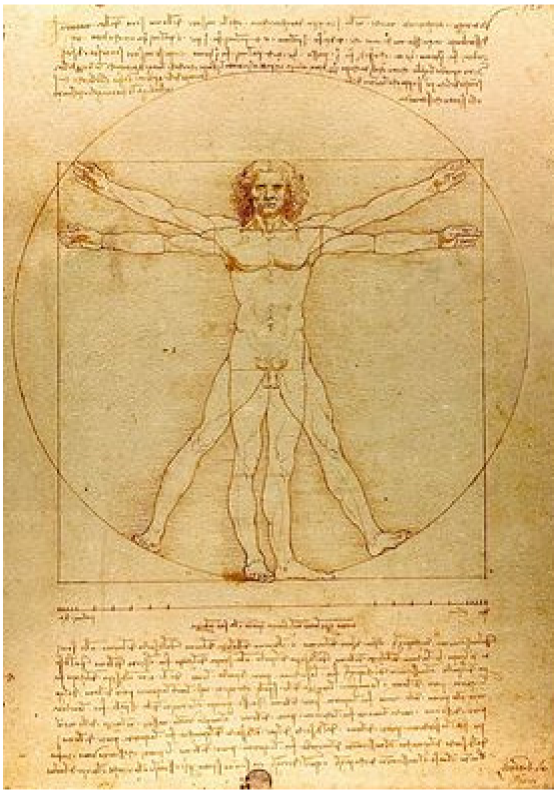
$$= \int_{-1}^{4} \left(-x^2 + 3\cdot x + 4\right) dx = \frac{125}{6}$$

► Altri studi della geometria sferica giungono a noi, risalenti al primo secolo avanti Cristo, dal matematico ed astronomo **Teodosio di Bitinia**, noto anche come**Teodosio Tripolita** (Tripoli, 160 a. C. – 100 a.C.).

Scrisse, oltre che sulla *geometria sferica*, trattati su"*i giorni e le notti*" e sulla "*posizione delle stelle*" riferita, nelle varie stagioni, a diversi siti della Terra; i suoi lavori gli consentirono di essere incluso nella collezione dei classici dell'astronomia.

► **Vitruvio** attribuisce a Teodosio l'ideazione di una meridiana utilizzabile in qualunque luogo della Terra.

NOTA. Marco Vitruvio Pollione, architetto e scrittore del primo secolo avanti Cristo (80 a.C.- 23 a. C.), è considerato il più famoso architetto **teorico** di tutti i tempi; ad esso si è ispirato Leonardo da Vinci nel suo disegno a matita e inchiostro su carta di dimensione 34cm per 24cm che è, per l'appunto, chiamato ***Uomo Vitruviano***. Questa meravigliosa opera , vuole rappresentare le proporzioni ideali del corpo umano con due figure geometriche perfette (quadrato e cerchio) in cui essa è inserita.



► Successivamente, con buon livello scientifico, a cavallo tra il primo e secondo secolo, ci pervengono scritti di **Menelao** (Alessandria d'Egitto, 70 – Roma 140) , anch'esso matematico ed astronomo; nel suo trattato di geometria sferica, per la prima volta viene citata la locuzione "*triangolo sferico*"

Della sua vita poco si sa; alcuni lo ambientano ad Alessandria d'Egitto, ma, deve aver vissuto anche a Roma, dove pare che sia morto, infatti nella conversazione di Plutarco sull'opera "*de faciequae in orbe lunaeapparet*" che in questa città si è tenuta, sembra che vi abbia contribuito al dibattito anche Menelao.

NOTA

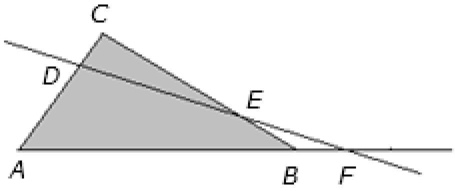
Rinomato è il teorema che va sotto il suo nome:

Dati un triangolo *ABC* ed una trasversale che interseca le rette dei lati (due lati ed il prolungamento del terzo o i prolungamenti dei tre lati) nei punti :

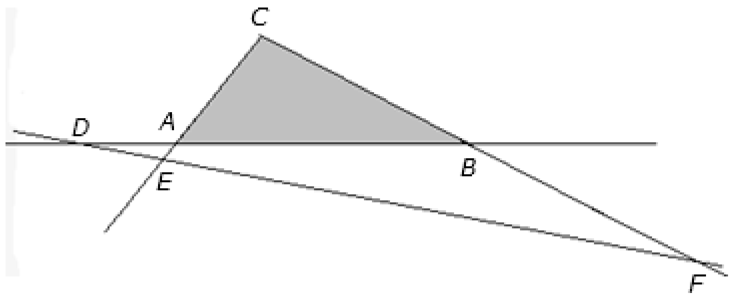
- F sulla retta AB,
- E sulla retta BC ,
- D sulla retta AC,

abbiamo:

$$\frac{BE}{CE} \cdot \frac{AF}{BF} \cdot \frac{CD}{AD} = 1 .$$



trasversale che attraversa
il triangolo



trasversale esterna
al triangolo

L'unica opera di cui siamo a conoscenza è ***Sphaerica***: questo trattato, che è il più prestigioso tramandatoci dal passato, è composto da tre tomi:

- il primo tratta il triangolo sferico approfondendo la geometria sulla superficie sferica e sviluppa la geometria della superficie sferica confrontandola con quella piana di Euclide(circa 300 a.C.),

In particolare il quinto postulato della geometria euclidea (per un punto *P*, esterno ad una retta *r*, passa una ed una sola retta parallela ad *r*) non vale sulla superficie sferica perché su di essa non esistono rette parallele (due circonferenze massime hanno sempre due punti comuni diametralmente opposti)

Inoltre nella geometria piana due triangoli che hanno gli angoli uguali sono simili, mentre nella geometria sferica sono uguali.

- il secondo cura problemi pratici di astronomia,
- il terzo tratta la trigonometria sferica; in questo tomo è riportato il teorema di Menelao.

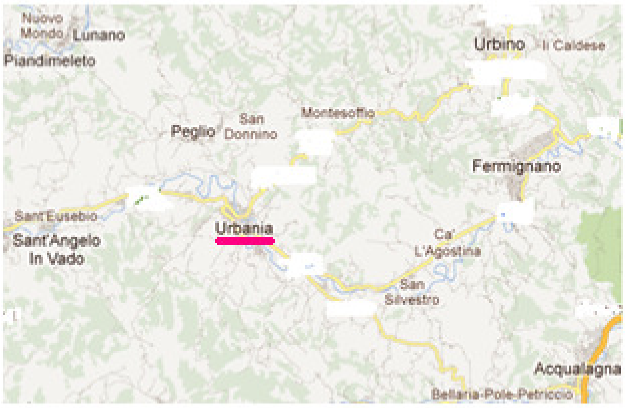
L'opera originale è andata persa, ma ne viene conservata una traduzione dall'arabo in latino ad opera del famoso Gerardo da Cremona (Cremona 1114 – Toledo 1187).

► **Claudio Tolomeo** nell'importante sua opera "*Almagesto*" scritta circa nel 150, cita Menelao che nel 98 aveva osservato le eclissi della *Luna* e delle stelle *Beta Scorpii* (sistema stellare della costellazione dello Scorpione) e *Spica* (stella brillante di prima magnitudine della costellazione della Vergine).

Claudio Tolomeo (100 circa – 175 circa) visse ad Alessandria d'Egitto al tempo dell'imperatore Adriano. Grande astronomo e ancor più grande geografo. Egli, per primo, escogitò un tipo di proiezione con la quale poté rappresentare la superficie sferica su di un piano; costruì quindi carte geografiche accompagnate da un libro "*geografia*" in cui vi era una sequenza di luoghi corredati dalle rispettive coordinate geografiche (latitudine e longitudine), nonché da una accurata spiegazione delle caratteristiche topografiche di quei luoghi; le carte geografiche si sono perse, ma Tolomeo si premurò a lasciare scritte le procedure per poterle costruire.

► E' bene ricordare **Gerhard Mercator** (Rupelmonde nelle Fiandre 1512 – Duisburg 1594):

- non solo per il grande apporto dato alla navigazione avendo, nel 1569, ideato una proiezione cartografica cilindrica centrale modificata , tale da renderla isogonica; questa proprietà consente che qualunque angolo sulla superficie sferica terrestre sia rappresentato sulla carta da un angolo uguale ed allora permette di rappresentare le lossodromie con segmenti, mantenendo così le rotte (ed è per questo che tale proiezione è detta ***carta marina***);
- ma anche per i due **globi** che ha costruito con legno di quercia e dipinti a mano, uno rappresentante la *sfera terrestre*(costruito nel 1541) l'altro la *sfera celeste*(costruito nel 1551), entrambi custoditi nel museo civico di Urbania, vanto di quella città delle Marche sia per la rarità dei due reperti che per la grandiosità del loro costruttore (vedi figure)



I pionieri della geometria sferica si accorsero che due figure possono essere uguali, senza che, con nessun movimento rigido, potessero sovrapporsi. La **non congruenza** di due triangoli sferici opposti è stata apertamente espressa da Johann Andreas vonSegner (Presburgo 1704 – Halle 1777), medico, matematico e fisico tedesco.

Le figure uguali ma non congruenti sulla superficie sferica vengono chiamate *figure simmetriche* da **Legendre** (Tolosa 1752 – Parigi 1833), matematico francese che ha dato soprattutto contributi nei campi della teoria dei numeri,dell'analisi infinitesimale e della geometria solida; scrisse anche un testo di geometria elementare che per molti anni fu usato in tutta l'Europa.

► La geometria sferica diventa scienza a cominciare da **Francois Viete** (latinizzato Franciscus Vieta), nato a Fontenay le-Comte nel 1540 e morto a Parigi nel 1603.

Vieta è stato prima politico e poi matematico, infatti si applica alle discipline matematiche solo nel tempo libero dagli impegni politici. E, pur tuttavia, fu molto prolifico nei suoi studi scientifici; in particolare fu il padre della moderna algebra ovvero quella simbolica; ideò infatti quel simbolismo, che è in uso tutt'oggi nelle scuole, che consente di rendere più agevole i vari sviluppi deduttivi.

Porta inoltre rilevanti contributi alla geometria, alla trigonometria e all'astronomia:

- tra il 1564 ed il 1568 scrive un trattato dal titolo "*HarmoniconCoeleste*",
- nel 1571 pubblica "*Canon mathematicus*"; consiste in un trattato di trigonometria nel quale, per la prima volta, utilizza una grande quantità di cifre decimali per i valori naturali delle

funzioni goniometriche; ma, soprattutto, approfondisce la teoria delle funzioni circolari e descrive esaurientemente i metodi per risolvere i triangoli sia piani che sferici.

- nel 1591 pubblica "*Isagoge in artemanalyticam*", opera nella quale viene presentato il calcolo letterale, allontanandosi definitamente dall'algebra antica ovvero da quella retorica,
- nel 1593 pubblica un'opera che tratta diversi problemi matematici ed in particolare la quadratura del cerchio e la trisezione dell'angolo piano.

Scrisse molte altre opere che qui non riportiamo, ma è da ricordare che la stampa in quell'epoca era piuttosto costosa e che Vieta, essendo molto benestante, pagava di sua tasca le varie pubblicazioni che, successivamente, era uso regalare ai matematici di svariati paesi al fine di far conoscere le sue teorie ed avere nel contempo approvazioni, osservazioni e perché no anche critiche di ritorno.

Osservazione. Quanto ulteriore contributo avrebbe potuto portare alla ricerca scientifica se questa fosse stata la sua primaria attività.

► **Johannes Kepler**, latinizzato **Giovanni Keplero** (1571-1630), musicista, matematico ed astronomo tedesco, studioso dei moti dei pianeti del sistema solare.

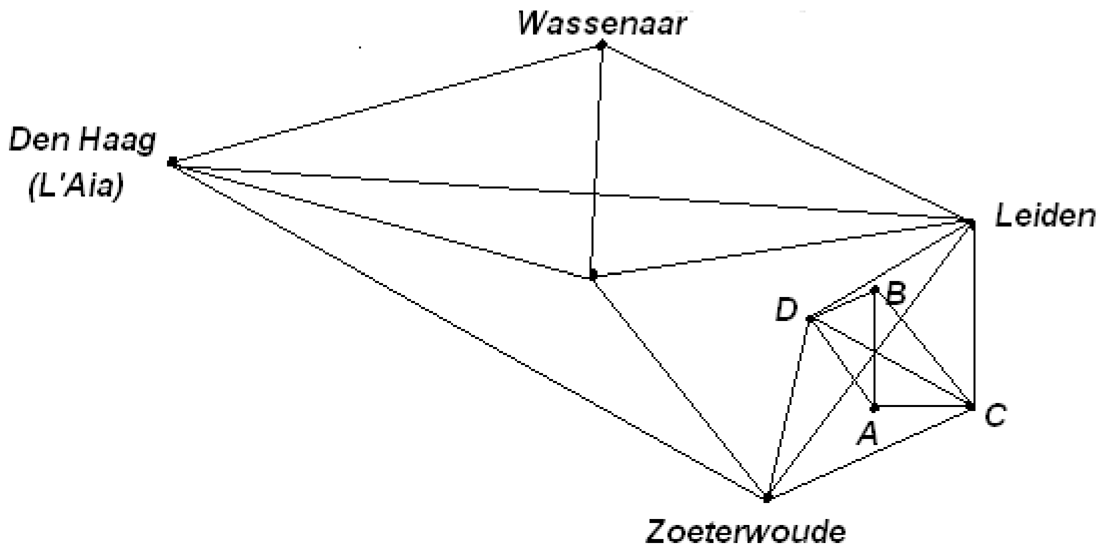
Famose le tre leggi di Keplero (che tutti gli studenti conoscono dalla fisica o dalla geografia astronomica) che espongono il moto dei pianeti attorno al Sole. Mentre le prime due sono apparse nell'opera "*Astronomia Nova*" che Keplero pubblicò nel 1609, la terza appare in un'opera successiva del 1916 col titolo "*Harmonic Mundi*"; questo titolo è giustificato dal fatto che furono proprio le conoscenze della teoria musicale ad orientare e spronare l'autore per enunciarla, convinto che i moti dei pianeti e la musica fossero espressioni di una stessa sinfonia.
Sta di fatto che la terza legge, enunciata dopo ben 24 anni di osservazioni ed elaborazione di calcoli è, forse, la più geniale e nello stesso tempo eccentrica: "lega infatti dei volumi (cubi dei semiassi maggiori delle orbite dei pianeti) con dei quadrati di tempi (quadrati dei periodi di rivoluzione dei pianeti).

► **Willebrord van RoijenSnell** (1581-1626), latinizzato **Snellius**, sotto l'influsso dell'operosità di Vieta si dedica a problemi pratici. Notevole è il procedimento di triangolazione (per la prima volta nella storia) utilizzato per misurare la lunghezza del circolo massimo terrestre.

Si avvalse della così detta triangolazione che consiste nel calcolare distanze sfruttando la soluzione di triangoli, partendo da una base scelta sul terreno e accuratamente misurata.

Successivamente, da questa, si misura una ulteriore base più lunga e poi un'altra ancora più lunga; continuando questo procedimento, mediante calcoli trigonometrici,si arriva a misurare un consistente arco di meridiano, da cui si raggiunge lo scopo prefissato.

Egli, in particolare, misurò una base AB di 328 metri; mediante un quadrante di ottone traguardò altri due punti del terreno C e D; risolvendo i due triangoli così ottenuti poté misurare la nuova base CD; iterando questo procedimento (in figura è riportata la triangolazione iniziale) riuscì a misurare la distanza sferica (127850 m) tra le città Bergen e Alkmaar , città situate pressoché sullo stesso meridiano, la prima a sud e la seconda a nord dell'Olanda.



Successivamente, tramite l'ombra che una alta torre, a mezzogiorno vero, formava sul terreno (allo stesso modo come operò Eratostene), poté misurare l'angolo al centro della Terra che sottendeva quell'arco di meridiano. Dai suoi calcoli la lunghezza del meridiani terrestre risultava 38600000 *m*.

Così che ad un grado di circolo massimo corrispondevano $\frac{38600}{360°} Km \approx 107.2 Km$, contrariamente all'attuale $\frac{40000}{360°} Km \approx 111.1 Km$.

In realtà la Terra ha forma geoidica; riportiamo nella seguente tabella alcune misure dei semiassi della Terra relative ad alcune epoche

	semiasse maggiore a approssimato al metro	semiasse minore b approssimato al metro
Bessel 1841	6377397	6356078
Hayford 1910	6378388	6356911
WGS-72 1972	6378135	6356750
WGS-84 1984	6378137	6356752

Noto è il problema topografico ideato da Snellius e arricchito dal topografo Pothenot , che va appunto sotto il nome di **problema di Snellius- Pothenot**(Pothenot era insigne topografo).

Esso consiste nella determinazione delle coordinante geografiche di un punto di non nota posizione da cui si rilevano tre punti (non allineati) di nota posizione.

Presi due punti A eB, di nota posizione, rilevati da un punto N di posizione incognita, si misurano da N i rilevamenti veri (azimut) dei punti A e B. Con la differenza $\Delta\alpha$ dei due rilevamenti (ovvero dei rilevamenti opposti) (in figura gli angoli Φ e ϑ), si ottiene un luogo di posizione che si chiama **cerchio capace**, ovvero il luogo dei punti da cui, sotto lo stesso angolo, si vede il segmento AB (da cui la locuzione ***capace***). Come si costruisce questo cerchio? Si tracciano:

- l'asse del segmento HK di AB(corda del cerchio capace),
- la semiretta BF tale che $A\hat{B}F = 90° - \alpha$;

l'intersezione O di HK e BF è il centro del cerchio capace (geometricamente facile da verificarsi).

La Fig.1 giustifica la relazione:

differenza dei rilevamenti opposti = $\Delta\alpha$.

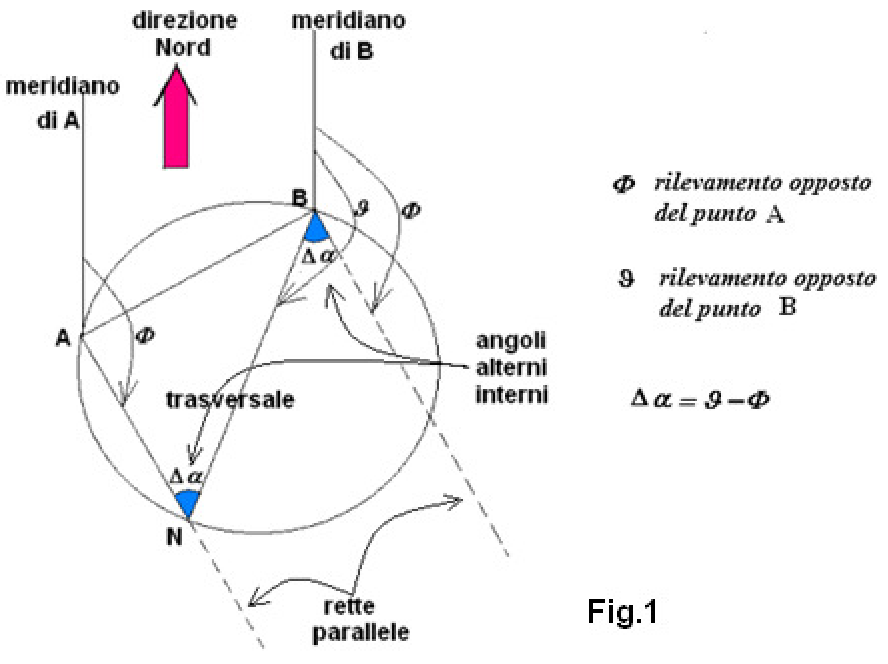


Fig.1

La Fig.2 riporta la costruzione del cerchio capace riferito alla base AB; la Fig.3 riporta i cerchi capaci di due basi consecutive AB e BC(A, B, C sono punti di nota posizione), per cui l'intersezione dei due luoghi di posizione da univocamente il punto da cui si sono fatte le misure dei rilevamenti, e del quale ora se ne possono determinare le coordinate.

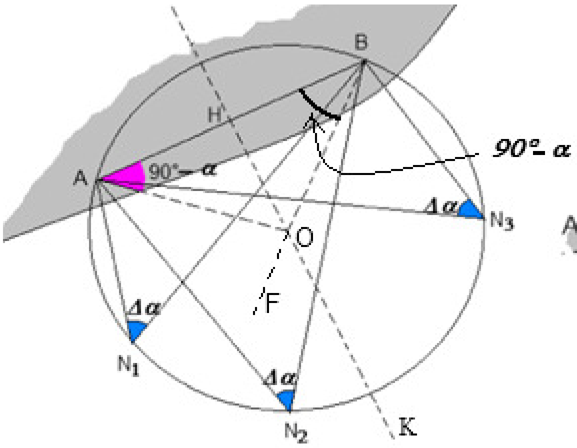


Fig. 2

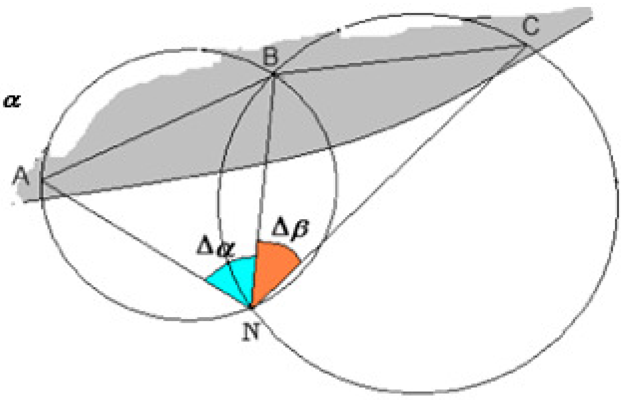
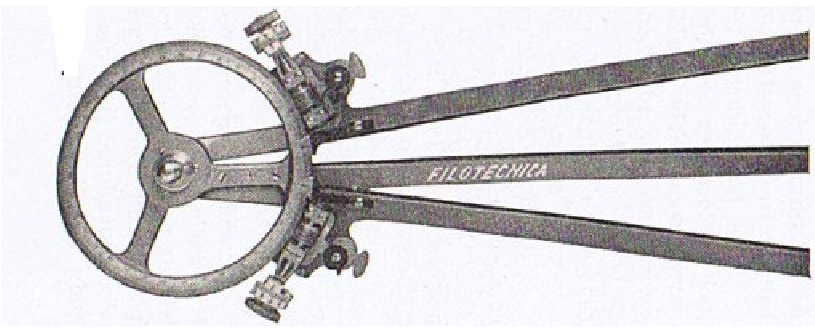


Fig.3

Questo metodo viene impiegato nella navigazione costiera, tanto che nelle figure sono riportati i punti noti sulla costa e il punto incognito è un punto del mare.

Diciamo che oggi ben pochi utilizzano ancora questo stupendo metodo perché il GPS, strumento indubbiamente valido, ci ha tolto tutta la poesia del calcolo.

Storicamente, veniva utilizzato, a bordo, lo *staziografo* che sostituisce il precedente procedimento diminuendo moltissimo i tempi per la determinazione del punto nave. Questo strumento consente di determinare, sulla carta nautica, il punto nave conoscendo la posizione di tre punti non allineati. Esso consiste di un cerchio graduato, dal centro del quale partono tre aste, ad esso complanari. Le tre aste possono ruotare attorno al centro del cerchio e quindi sono orientabili secondo i rilevamenti eseguiti.

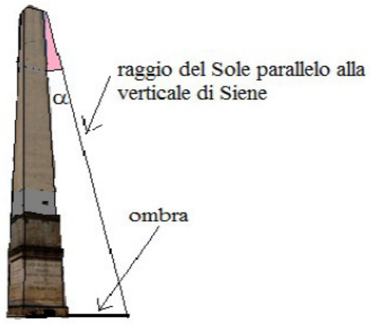


► Nella presentazione della triangolazione utilizzata da Snellius abbiamo citato Eratostene; pensiamo che sia un'occasione per presentare la sua strategia.

Eratostene (contemporaneo di Archimede), matematico ed astronomo greco, nasce a Cirene nel 275 (o 276) a.C. (pare che si sia ucciso a causa della cecità che lo colpì).

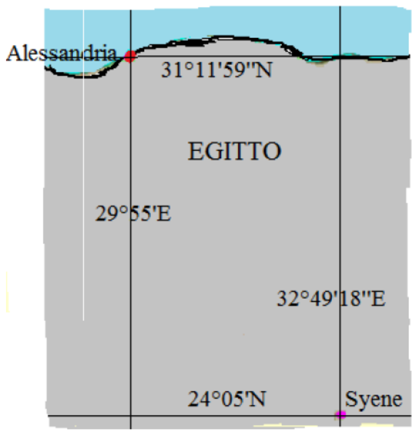
La sua celebrità è dovuta maggiormente al calcolo, con buona approssimazione, della lunghezza fella circonferenza massima della Terra, diciamo del circolo meridiano terrestre.

Nel giorno del solstizio d'estate misurò l'angolo α che la parallela alla verticale di Syene, passante per il punto più alto dell'obelisco di Alessandria d'Egitto, formava con l'obelisco stesso, ovviamente servendosi delle ombre (vedi figura)



L'obelisco' alto 25.5 metri, trasportato da Alessandria nel 37 e collocato sulla spina (muro di mattoni che divideva, a forma di spina dorsale, il circo romano, alle estremità delle quali vi erano tre colonne a conformazione di cono attorno cui giravano i carri) del circo di Nerone, è oggi l'unico obelisco antico di Roma che non sia mai caduto ed è posto al centro della piazza di San Pietro, in Vaticano, dal 19 settembre 1586.

Eratostene aveva dimora a Syene (attuale Aswan) che è situata a circa 800 Km a sud, e leggermente sposta verso est, di Alessandria, dove lavorava come bibliotecario.



Un giorno, in riposo nella sua proprietà, come di consueto lasciava cadere dei sassolini nel pozzo del cortile della sua casa e si divertiva ad ascoltare il tonfo nell'acqua che, sia per la profondità del pozzo stesso che per la mancanza di luce non aveva mai visto.

Ma, " quel giorno", affacciandosi al bordo del pozzo, per la prima volta vide l'acqua.

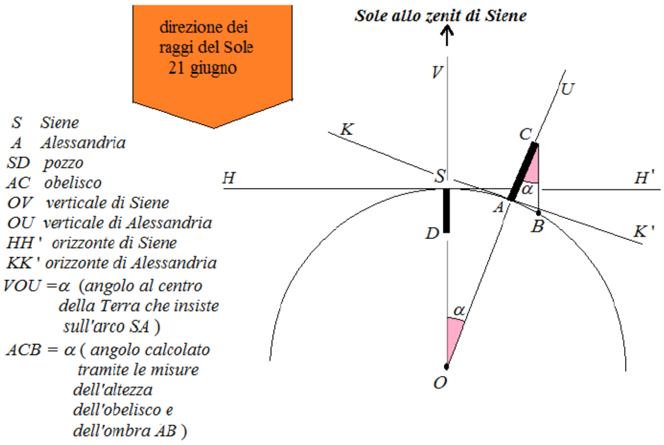
Ciò avveniva perché era mezzogiorno del 21 luglio (declinazione del Sole = 23° 27'*N*), ed essendo Syene posizionata pressoché sul Tropico del Cancro (latitudine di Syene = 24° 05'*N*) i raggi del Sole, a mezzogiorno di "quel giorno" cadono perpendicolarmente sul suo piano orizzontale.

Ma, la nostra stella è molto lontana dalla Terra (circa centocinquanta milioni di chilometri),

allora i suoi raggi arrivano sul nostro pianeta in formazione di fasci paralleli.

Eratostene decise, nel ritorno ad Alessandria, di misurare (a giorni di Cammello) la distanza Syene-Alessandria ed il 21 luglio dell'anno successivo, a mezzogiorno in punto, misurò l'angolo α .

Dalla seguente figura, tenuto conto della proprietà degli angoli alterni interni formati da due rette parallele tagliate da una trasversale, risulterà facile il procedimento seguito da Eratostene, riportato subito di seguito alla figura, per il calcolo della lunghezza del meridiano terrestre



$$\textit{lunghezza circolo meridiano} : \textit{angolo giro} = \textit{distanza Siene-Alessandria} : \frac{1}{50}\ \textit{angolo giro}$$

$$\textit{lunghezza circolo meridiano} = 50 \textit{ volte la distanza Siene-Alessandria} \quad \text{ovvero}$$

$$\textit{lunghezza circolo meridiano} = (50 \cdot 5000)\ \textit{stadi} = 250000\ \textit{stadi}$$

$$\textit{lunghezza circolo meridiano} = (250000 \cdot 157.5)\ \textit{metri} = 39375\ \textit{chilometri}$$

Alcune doverose precisazioni:

- Pare che non vi fosse una misura unica, ben stabilita, dello stadio (unità di misura di lunghezza di quei tempi), e che questa, espressa in metri variasse tra i 155 m e i 210 m. Si suppone che Eratostene usò uno stadio equivalente a 157.5 m, e, tra Syene ed Alessandria (a giorni di cammello) ne misurò ben 5000.
  L'anno successivo, nello stesso giorno 21 luglio, a mezzogiorno, misurava l'angolo α che risultò pari ad un cinquantesimo dell'angolo giro.
  Tutto ciò giustifica il calcolo precedentemente riportato.
- Spesso accade che i geni, nelle loro scoperte, godano di alcune fortunate coincidenze, ed Eratostene non ne fu neppure lui immune, infatti ne usufruì almeno di tre:
  1. le due città coinvolte nel calcolo sono pressoché sullo stesso meridiano,
  2. ad Alessandria vi era un obelisco piuttosto alto che consentì di effettuare una sufficiente accurata misura dell'angolo α,
  3. era in riposo dagli impegni lavorativi nel giorno del solstizio e proprio a mezzogiorno era sul bordo del pozzo di casa sua da cui lascava cadere alcuni sassolini.

► **Cavalieri Bonaventura** (Milano 1598-Bologna 1647), gesuita e matematico italiano. Egli, mediante un suo teorema che va sotto la dicitura "*principio di Cavalieri*" determinò la formula del volume V della sfera, in funzione del raggio R: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$ (nota è la filastrocca atta a ricordarla: *il volume della sfera qual è? Quattro terzi pi greco erre tre*).

Principio di Cavalieri: in due solidi, di uguale altezza, se le sezioni individuate da piani paralleli alle basi, ad uguale distanza da esse, stanno sempre in un dato rapporto, allora anche i volumi dei due solidi stanno nello stesso rapporto; in particolare se le due suddette sezioni sono equivalenti, allora sono equivalenti anche i due solidi.

► **Saccheri Gerolamo** (SanRemo1667-Milano1733), gesuita e matematico italiano, è il precursore delle geometrie non euclidee. La sua idea sfociò nel voler provare a negare il V postulato; da questa sua ipotesi egli pensava di giungere certamente ad un assurdo; ebbene, involontariamente, diede inizio, anche se in modo rudimentale, alla teoria delle geometrie iperboliche ed ellissoidiche che, per l'appunto, negano il V postulato della geometria euclidea.

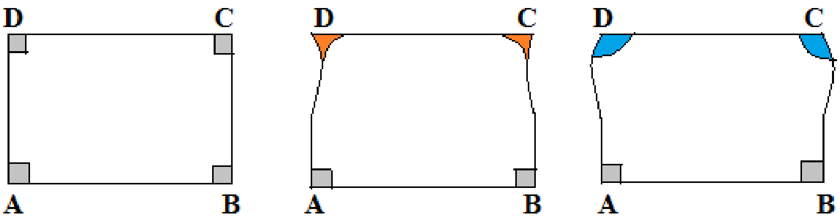
La sua dimostrazione si basava sull'ideazione di particolari quadrilateri che portano il suo nome.

In particolare egli , partendo da due presupposti:

a) *che l'enunciato del V postulato fosse vero*
b) *che questi potesse essere dimostrato utilizzando i precedenti postulati e, pertanto, potesse essere trasformato in teorema,*

ideò dei quadrilateri formati da due lati AD e BC uguali, da una base AB, ad essi perpendicolare, e da un lato CD, detto *sommità*. Questi quadrilateri, essendo gli angoli A e B retti, sono isosceli; pertanto segue che anche i due angoli C e D sono uguali; egli ipotizzò che questi potessero essere:

- retti
- acuti
- ottusi,



da cui sperava di ottenere quell'assurdo di cui prima ………..

Studiò a Genova presso l'ordine della Compagnia di Gesù, dove, in particolare, cominciò ad interessarsi di geometria.

Si dedicò anche alla logica matematica e alla statica su cui ebbe due pubblicazioni rispettivamente nel 1697 e nel 1708. Ma la sua più pregiata opera, pubblicata post mortem, fu il trattato di geometria "*Euclides ab omninaevovindicat*" (la cui traduzione è " Euclide riscattato da ogni difetto).

Osservazione. Riemann, seguendo gli studi di Saccheri approdò alla geometria ellittica (di cui quella sferica ne è un caso particolare).

► **Anders Johan Lexell** (1740 – 1784) matematico ed astronomo finlandese, naturalizzato russo col nome Andrei IvanovicLeksel. Collaborò con Eulero all'accademia delle scienze a San Pietroburgo con l'incarico di docente di astronomia.

Viaggiò per due anni visitando Inghilterra, Germania e Francia; al suo rientro a San Pietroburgo sostituì Eulero (dopo la sua morte) nella cattedra di matematica, apportando notevoli contributi alla geometria sferica.

Lexell dimostrò che Urano era un pianeta e non una cometa come si credeva precedentemente. Urano (settimo pianeta in ordine di distanza a partire dal Sole) è stato il primo pianeta, nel 1781, ad essere scoperto utilizzando il telescopio di Herschel.

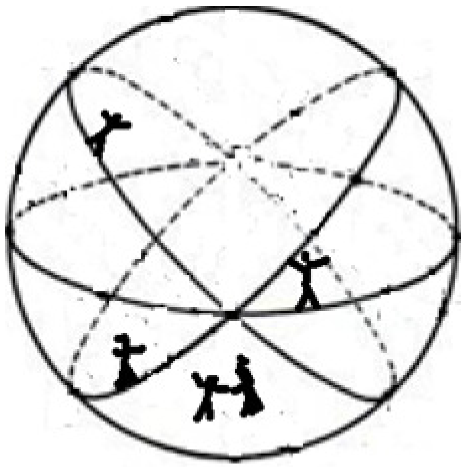
Lexell dimostrò che la sua orbita, quasi circolare, è del tutto esterna a quella di Saturno.

In suo onore, un asteroide della fascia principale (regione del sistema solare, fra l'orbita di Marte e quella di Giove, che contiene la massima concentrazione di asteroidi) fu chiamato 2004Lexell.

► **Herschel William Frederck** (Hannover 1738 – Slough 1822) era musicista, fisico ed astronomo inglese ma di origine tedesca. Forse il maggiore osservatore dei fenomeni astronomici di tutti tempi. Costruì, nel 1781, un telescopio lungo $5.5\,ft = (5.5 \cdot 0{,}3048\,)m \approx 1.68\,m$. Tra il 1774 e il 1781, dopo ripetute osservazioni, indagando sulle stelle doppie, verificando l'estensione alle stelle della gravità, infatti scoprì esse orbitavano l'una attorno all'altra.

► **Poincaré Jules Henri** (Nancy 1854 – Parigi 1912) è uno dei più importanti matematici francesi moderni, vissuto a cavallo tra l'ottocento ed il novecento; ha fornito considerevoli apporti alla matematica attuale, interessandosi di analisi infinitesimale, probabilità, geometria, epistemologia e fisica matematica.

A proposito di geometria , in una delle sue opere, rappresenta un curioso mondo abitato da esseri sprovvisti di altezza, ovvero come estesi sulla superficie sferica, assumendone la sua sfericità ed impediti assolutamente di allontanarsene. In queste ipotesi, lo spazio in cui vivono questi strani esseri è certamente bidimensionale. Ma, allora che cosa è una retta per questi strani abitanti? E' certamente un circolo massimo perché solo ivi si può percorrere la strada più corta tra due punti di esso (ovviamente estremi di un arco minore di 180°); pertanto la geometria di queste creature è certamente e solamente quella sferica.



La superficie sferica, e solo quella, è il loro unico spazio dove si svolgono tutti gli avvenimenti che li coinvolgono; trattasi comunque di uno spazio "*infinto limitato*", in quanto.

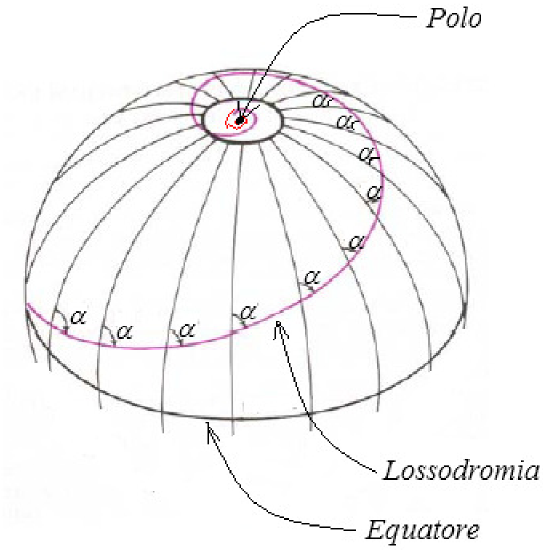
- la superficie sferica è certamente limitata,
- la superficie sferica può essere percorsa indefinitamente, sempre nello stesso senso, ripassando infinite volte dal punto di partenza.

Osservazione. Abbiamo considerato nella geometria sferica di Poincaré solamente circoli massimi, ma su questa superficie, teoricamente, si può tracciare una infinità di curve, ad esempio una curva lossodromica.
Premettiamo la definizione di questa curva nell'ambito della superficie terrestre, considerata perfettamente sferica:

una**lossodromia** (dal greco: *loxos* = curvo e *dromos* = cammino) è una spirale logaritmica che passa per due punti
(non aventi :

- la stessa latitudine, infatti i paralleli sono lossodromie degeneri,
- la stessa longitudine, infatti i meridiani sono lossodromie degeneri)

della superficie terrestre, che interseca i meridiani sotto lostesso angolo (rotta lossodromica) e che tende asintoticamente ai poli.



I poli sono detti punti asintotici o semplicemente asintoti delle lossodromie.
Ora possiamo pensare che questa curva sia tracciata sulla sfera di Poincaré e, che un abitante, considerato, per ipotesi puntiforme, la percorra; in queste circostanze l'essere cammina per l'eternità avvicinandosi sempre di più, senza mai raggiungerlo (dal concetto di tendenza asintotica), uno dei poli e senza mai ritornare su posizioni precedenti; ancora una volta il cammino sembra infinito, pur essendo finito il mondo in cui abita(vedi paradosso della lossodromia dello stesso autore).
Osservazuione. Per una nave che seguisse la lossodromia in figura, verso il polo(asintoto di quella lossodromia), l'angolo α ne sarebbe la rotta vera.

Si potrebbe pensare allora che quegli esseri vivano nella nostra stessa geometria, visto che noi abitiamo sulla superficie terrestre che, con buona approssimazione, possiamo considerare sferica. Ma, non è proprio così, infatti, noi siamo provvisti di altezza e non propriamente vincolati a tenere i piedi sempre sulla superficie terrestre; per noi esiste quindi anche la retta ed il piano (più propriamente parti di essi) nel senso della geometria euclidea , infatti:

1. possiamo disegnare, con una riga, un segmento su di un foglio di carta, ove il filo della riga è esso stesso una parte di retta,
2. possiamo giocare a biliardo la cui superficie è piana (porzione di piano euclideo), lanciando una palla rettilineamente,
3. ….

Però, come nella geometria di Poincaré, la distanza, per esempio, tra Genova e Rio de Janeiro non è certamente euclidea, bensì circolare (in realtà sulla Terra è un arco di geodetica)

Questa geometria *poincaieriana* ci consente di poter capire meglio la geometria di Riemann., infatti quest'ultima è una geometria sferica estesa alle tre dimensioni.

Un episodio affascinante della sua vita è il modo con cui scoprì particolari funzioni che chiamò *fuchsiane*; racconta che giornalmente trascorreva due o tre ore seduto alla sua scrivania, analizzando un ingente numero di possibilità senza nessun successo. Una sera insistendo con più tenacia raggiunse una circostanza ferma e stabile. Raggiunto questo sperato risultato, andò a dormire, e durante la notte, il suo subcosciente fece lavorare ancora il suo cervello tanto che la mattina successiva poté compilare, in poco tempo, la teoria su quelle funzioni.
Sono significativi, dopo questa esperienza, i suggerimenti che il Prof.Poincaré dava agli studenti: "*un problema difficile va affrontato con applicazioni non troppo lunghe ma regolari; e siccome il nostro cervello sviluppa una attività subcosciente, è bene servirsene senza porre nessun freno*".

► Riemann Bernhard (1826-1866) è uno dei maggiori e più eccentrici matematici moderni.
Ha avuto vita breve, non raggiunse i quaranta anni di età; fu comunque molto prolifico nel lavoro scientifico, soprattutto nella sua geometria che, come disse Albert Einstein, interpreta l'Universo in ampia portata.

► Non dimentichiamo π, grande protagonista del cerchio e della sfera (periodo aureo greco) di cui non basterebbero queste pagine per dargli la degna rilevanza che si merita. Diamo pertanto una breve, ma significativa, presentazione

Pi greco (π) è un numero costante **irrazionale**(non esprimibile come rapporto di interi, dimostrato dal matematico Johann Heinrich Lambert nel 1761) e **trascendente**(non può essere soluzione di nessuna equazione algebrica, dimostrato, nel 1882, dal matematico Ferddinand Von Lindmann)

Esso viene definito:

1. **in geometria**:
    - come il rapporto tra le lunghezze della circonferenza ed il diametro di un cerchio,oppure,
    - come l'area di un cerchio avente raggio unitario;

2. **in goniometria** (analisi matematica)
    - come il minimo numero positivo (non nullo) che annulla il seno, oppure
    - come la metà del minimo numero positivo che annulla il coseno.

Il simbolo che lo esprime è forse dovuto alla prima lettera della parola *perimetro* (misura intorno) che in greco è*περιμετροζ*, oppure anche della iniziale del nome del grande matematico di Samo: Pitagora, che in greco è*Πυθαγόρας*.

Osservazione. Forse è più plausibile la prima ipotesi, perché se fosse la seconda a dare il simbolo a questo numero costante, sarebbe, con tutta probabilità, espresso con carattere maiuscolo, contrariamente alla tradizione che lo vuole espresso con carattere minuscolo.

Pare che il simbolo π , per la prima volta, compaia nell' opera del 1706 "*A New introduction to mathematics*" del matematico Willliam Jones, universalizzato successivamente da Eulero.

Riportiamo l' algoritmo, per la determinazione del valore di π , ideata, nel1995 del matematico canadese Simon Plouffe (nato a Saint-Jounvite nel 1956) , la quale è l'espressione in "*fondo grigio"* del seguente programmino, allorquando si sostituisca al secondo estremo della sommatoria il simbolo ∞ al simbolo *n*.

$$\mathrm{VECTOR}\left(\left[n, \frac{1}{2^6}\cdot\sum_{n=0}^{n}\frac{(-1)^n}{2^{10\cdot n}}\cdot\left(-\frac{2^5}{4\cdot n+1}-\frac{1}{4\cdot n+3}+\frac{2^8}{10\cdot n+1}-\frac{2^6}{10\cdot n+3}-\frac{2^2}{10\cdot n+5}-\frac{2^2}{10\cdot n+7}+\frac{1}{10\cdot n+9}\right)\right], n, 0, 20\right)$$

0	3.14176587301587301587
1	3.14159257186839030637
2	3.14159265364205076994
3	3.14159265358975536808
4	3.14159265358979326784
5	3.14159265358979323843
6	3.14159265358979323846
7	3.14159265358979323846
8	3.14159265358979323846

Volevamo, con questo programma, verificare il valore di π alla 20-*esima* cifra decimale; allo scopo abbiamo fatto variare (nel programmino) il parametro *n* da 0 a 20; ci siamo accorti che non erano necessari così tanti passi, perché, già dall'ottava riga ($n = 7$) della tabella, la ventesima cifra decimale è uguale a quella della riga precedente. Pertanto avremmo potuto fermarci ad $n = 7$; ma, come facevamo a saperlo a priori?

Spigolatura. Il matematico neozelandese Alexander Aitken (1895-1967), che aveva una memoria fenomenale, conosceva le prime 1000 cifre decimali (pare che avesse memorizzato addirittura le prime 2000 cifre decimali).

Il numero π entra a pieno titolo nell'*identità* di Eulero (che, il fisico Richard Feynman , Nobel nel 1965, battezzò con la dicitura " *laformula più bella della matematica"*)

$$e^{i\pi}+1=0\,,$$

insieme ad altri numeri, e precisamente:

- *e* ,detto, come già abbiamo visto, numero di Eulero o costante di Nepero(*e* è base dei logaritmi naturali) il quale lavorò per 20 anni sulla sua idea dei logaritmi, fino alla pubblicazione nel 1614 della sua opera "*Mirifici Logarithmorum*".

- L'unità immaginaria *i* , il cui quadrato è -1 e che ci rimanda al dibattito rinascimentale italiano tra Niccolò Fontana (Tartaglia) e Girolamo Cardano inerente alla risoluzione delle equazioni di terzo grado (circa nel 1550)

- 1, detta unità reale. Il numero 1 è il primo numero dei naturali (non dimentichiamo che il bambino quando inizia a contare, comincia dal numero 1: 1, 2, 3, 4, 5, ecc); il numero 1 è presente in tutte le culture della Terra……

- 0, detto assorbente del prodotto, entrato in Europa circa nel 1200 (vedi **Fibonacci**) provenendo dagli arabi che a loro volta l'avevano scoperto dagli indiani , ha consentito di passare dall'*algebra retorica* all'*algebra simbolica* che è quella che studiamo oggi nelle scuole

Osservando l'identità di Eulero ci possiamo porre molte domande, per esempio:

- Perché entità matematiche fondamentali e apparentemente tra loro lontane si possono tra loro così armonicamente intrecciare?
- Cosa ci può essere più di mistico di una interazione tra un numero immaginario che interagendo con dei numeri reali produce il "nulla"?
- C'è qualcosa di più grande di noi che ha già scritto tutto ciò indipendentemente dalla nostra intelligenza e addirittura dalla nostra stessa esistenza?

Matematica e poesia

La matematica e la poesia costituiscono due branche della cultura che hanno una grande affinità; entrambe , infervorate da un grande impegno di astrazione, cercano valori e principi universali per provare a capire l'uomo ed il mondo che lo circonda, anche al di là dei limiti del finito.
Ancora, la conformità tra le due discipline si riscontra soprattutto nell'armonia che incuriosisce ed avvince : la stessa musicalità che troviamo nelle parole di una poesia, la troviamo anche in un enunciato di un teorema e nella sua dimostrazione (quanto in essa i passaggi, purché esaustivi, siano sintetici e semplici).
Cosa c'è di più sublime :

- delle seguenti parole

………………………… Così tra questa
immensità s'annega il pensier mio:
e il naufragar m'è dolce in questo mare»

(Giacomo Leopardi)

che esprimonosimultaneamente immensità dello spazio ed eternità del tempo….?

oppure

- della asserzione "***la somma dei primi n numeri interi***(considerato lo zero come primo numero della sequenza , il naturale n occupa la posizione (n+1)-esima) ***è*** $\frac{n^2+n}{2}$

che esprime una infinità (perché se uno potesse credere di poter gridare il numero intero più grande possibile, esausto alla fine del suo dire, un altro, pacatamente, potrebbe pronunciare le parole "più uno" …..vedi il poeta Cesare Zavattini) ?

Non c'è, però, solamente affinità tra questi due rami della cultura, ma anche una certa intersezione.

Leggendo le opere dei vari poeti, alcune volte vi si incontrano passi in cui emergono citazioni di scienza, ed in particolare di matematica.
Visto che questa presentazione tratta la storia della sfera, cerchiamo alcune opere nelle quali viene citato (anche se non direttamente) il numero π.

Per esempio:

1) **Nell'Eneide di Publio Virgilio Marone** (poeta latino ,70 a C - 19 a. C . , grazie alla sua grande fama e all'influsso esercitato sulla cultura latina ed occidentale, è considerato il principe dei poeti di Roma)

nel "Libro Primo" si leggono i versi 586 - 591:

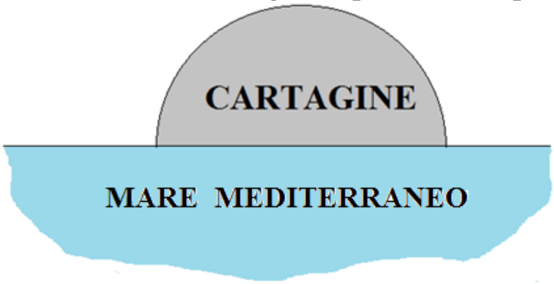
Giunsero in questi luoghi, ov'or vedrai
sorger la grande cittade e l'alta rocca
de la nuova Cartago, che dal fatto
Birsanomossi,per l'astuta merce
che, per fondarla, fer di tanto sito
quanto cerchiar di bue potesse un tergo.

Commento: Birsa, che in fenicio ha il significato di **rocca**, fu dai greci interpretata come "**pelle**", da cui la leggenda di Cartagine. Fondata nell'anno 814 a.C da Didone(figlia di Belo, re di Tiro) in Tunisia. Si racconta che Didone, obbligata a fuggire dalla sua patria, approdò in Tunisia, ed al re del posto (Iarba) chiese il permesso di fondare una città. Il re, ingannandola, acconsentì purché il terreno su cui doveva nascere la "nuova città" (significato di Cartago nel senso di nuova Tiro) fosse contenuta nella pelle di un bue. Ma, molto furbamente, Didone tagliò la pelle in strisce sottilissime, che , poste a formare un cerchio, diedero luogo al perimetro di Cartagine.
Con quella strategia Didone ottenne la città di massima estensione, infatti: *tra tutte le figure piane chiuse, di ugual perimetro, quella che racchiude la massima area è la circonferenza.*
E' significativo, per esempio, dimostrare che tra un quadrato ed un cerchio isoperimetrici, il cerchio è la figura di maggior area.
Detto $2p$ i l perimetro:

- per il quadrato di lato l, si ha: $l = \frac{p}{2}$ e quindi $Area = \frac{p^2}{4}$,
- per il cerchio di raggio r, si ha $r = \frac{p}{\pi}$ e quindi $Area = \frac{p^2}{\pi}$;

essendo che, tra due frazioni, aventi ugual numeratore, è maggiore quella che ha denominatore minore, risulta dimostrato l'asserto.
In particolare il cerchio ha area più grande di circa il 27% del quadrato ad esso isoperimetrico.

Osservazione. E' comunque probabile che Didone avesse formato una semicirconferenza avente per diametro la battigia del mare, visto che Cartagine è posizionata proprio sul mare.



.

2) Nel Convivio di Dante Alighieri (chiamato semplicemente Dante, nato a Firenze nel 1265 e morto a Ravenna nel 1321, scrittore, poetae politico italiano, padre della lingua italiana, autore di tanti poemied inparticolare della rinomata "Divina Commedia" che è considerata la più grande opera

scritta in italiano e probabilmente il più grande capolavoro della letteratura mondiale) **"Capitolo XIII" del "Trattato Secondo" , si legge:**

La Geometria si muove intra due repugnanti a essa, sì come 'l punto e lo cerchio - e dico "cerchio" largamente ogni ritondo, o corpo o superficie -; ché, sì come dice Euclide, lo punto è principio di quella, e, secondo che dice, lo cerchio è perfettissima figura in quella, che conviene però avere ragione di fine. Sì che tra 'l punto e lo cerchio sì come tra principio e fine si muove la Geometria, e questi due a la sua certezza repugnano; ché lo punto per la sua indivisibilitade è immensurabile, e lo cerchio per lo suo arco è impossibile a quadrare perfettamente, e però è impossibile a misurare a punto. E ancora la Geometria è bianchissima, in quanto è sanza macula d'errore e certissima per sé e per la sua ancella, che si chiama Perspettiva.

Oppure nel canto XXXIII del paradiso della Divina Commedia", si leggono i versi dal 133 al 141

Qual è 'l geomètra che tutto s'affige
per misurar lo cerchio, e non ritrova,
pensando, quel principio ond'elliindige

tal era io a quella vista nova:
veder voleva come si convenne

l'imago al cerchio e come vi s'indova;

ma non eran da ciò le proprie penne:
se non che la mia mente fu percossa
da un fulgore in che sua voglia venne.

Commento.Trattasi, in entrambi i poemi, di un problema che ascende agli albori dello studio della geometria, sul quale, per secoli, moltissimi matematici si sono impegnati.

Finalmente nel 1882 il matematico tedesco Ferdinand von Lindemann (1852-1939) dimostrò la **trascendenza** di π e quindi l'inattuabilità di quadrare il cerchio, ovvero di costruire un quadrato, con riga e compasso, equivalente ad un dato cerchio.

Infatti la soluzione del problema necessiterebbe della costruzione geometrica di $\sqrt{\pi}$, dovendo essere $r\sqrt{\pi}$ il lato del quadrato equivalente al cerchio di area πr^2.

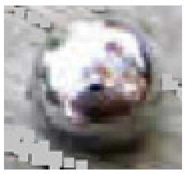
Osservazione. Si può ribaltare il problema col seguente enunciato: *tra tutte le figure piane di ugual superficie quella che ha minimo perimetro è la circonferenza.*

Questa proprietà delle figure bidimensionali vale anche nello spazio euclideo tridimensionale, cioè *la sfera è il solido che, a parità di volume, possiede la superficie minima*.

Così che possiamo comprendere la forma sferica delle gocce d'acqua , delle bolle di sapone (gioco che appassiona grandi e piccini), delle palline di mercurio, ecc, perché la tensione superficiale tende sempre a minimizzare la superficie, e come abbiamo detto questa superficie non può che essere sferica.

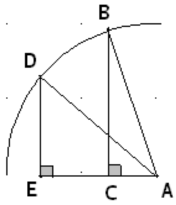

goccia d'acqua


bolla di sapone


pallina di mercurio

STORIA DELLA TRIGONOMETRIA

► Stabilito che in un triangolo il rapporto tra i lati è determinato dagli angoli, consideriamo la peculiarità del triangolo rettangolo, per cui, mediante uno dei suoi angoli acuti si calcola il rapporto tra due dei suoi lati; prendiamo, ad esempio, i due triangoli rettangoli in figura, con ipotenuse uguali ($AB = AD$), e, per ciascuno di essi consideriamo il cateto opposto all'angolo acuto in A.



Notiamo che se l'angolo acuto diminuisce, diminuisce anche il rapporto del cateto con l'ipotenusa, cioè

$$\frac{ED}{AD} < \frac{CB}{AB}.$$

Pertanto, in ogni triangolo rettangolo, il rapporto di un cateto con l'ipotenusa è una particolare *funzione* dell'angolo opposto a quel cateto; essa viene chiamata *seno dell'angolo*.

In formule, riguardo alla precedente figura, è:

$$\sin E\hat{A}D = \frac{ED}{AD} \quad , \quad \sin E\hat{A}B = \frac{CB}{AD}.$$

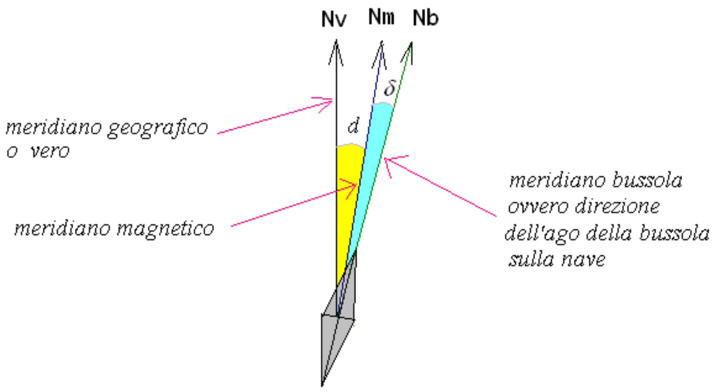
La parola **seno** è la traduzione in latino di un termine tecnico usato dagli astronomi arabi al tempo di Al-Battani (850-929 d.c.) detto, e ricordato, col nome di Albatenio.
La scuola di Albatenio studia le funzioni circolari ed apporta significativi miglioramenti alla trigonometria, allora conosciuta, dei greci e degli indiani, proponendo formule in cui si evidenzia la conoscenza delle funzioni *seno* e *coseno*.
E' da attribuirsi a Platone Tiburtino (Plato Tiburtinus di Tivoli delXII secolo) la prima pubblicazione dove è riportata la parola *seno*; infatti, oltre ad essere matematico ed astronomo, era anche traduttore. Egli tradusse (dall'arabo in latino) un'opera astronomica di Albatenio, che fu pubblicata successivamente, nel 1537, a Norimberga, nella quale, per la prima volta appunto, compariva la parola seno.

OSSERVAZIONE. In quell'epoca la lingua usata dagli scienziati in Europa era il latino, per cui quest'ultima era la lingua internazionale e quindi chiunque poteva leggere e studiare libri scientifici di qualunque regione.

Un'atra funzione angolare è il *coseno* definito come il complemento del seno, cioè:
$\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$
E' da notare come in quasi tutti i programmi informatici l'abbreviazione della parola *seno* è ***sin*** e del *coseno* è ***cos***; ciò e da attribuirsi al fatto che in latino il *seno* era detto *sinus* e che il coseno era detto *complementi sinus*, abbreviato in *cosinus* da Edmund Gunter (1581-1626), matematico ed astronomo inglese che per primo introdusse i termini coseno e cotangente e compilò le prime tavole dei logaritmi delle funzioni goniometriche a sette decimali.

==

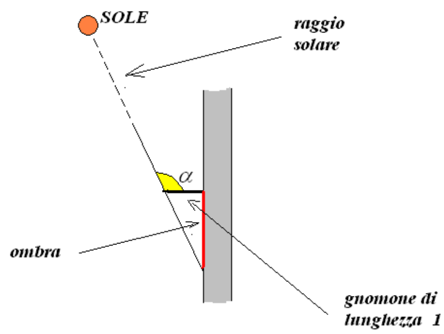
Nota. Gunter diede anche un forte contributo anche alla navigazione perché scoprì la variazione della declinazione magnetica, così che le carte nautiche riportavano la declinazione magnetica (espressa in gradi sessagesimali) con la variazione annua che consentiva ai naviganti l'uso della stessa carta per alcuni anni (diciamo al massimo 10).
Ricordo che la **declinazione magnetica** è l'angolo, misurato sul piano orizzontale tra la direzione dell'ago magnetico (*meridiano magnetico*) e la direzione del ***meridiano vero o geografico*** del luogo. Il suo valore varia da luogo a luogo e varia nel tempo in quanto il Nord Magnetico e il Nord Geografico non mantengono distanza costante .



In figura la direzione del Nb è quella segnata dall'ago della bussola magnetica, direzione che non coincide con quella del Nm a causa della deviazione magnetica.

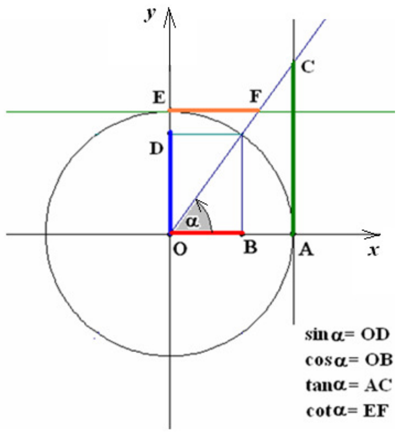
===

Il termine *tangente* viene usato per primo dal matematico danese ***Thomas Fincke*** nel 1583; questo termine è collegato alla scienza degli orologi solari (scienza gnomonica) e, nello specifico, la tangente è l'ombra che un gnomone, di lunghezza 1, infisso verticalmente su un muro, investito dai raggi solari, proietta sul muro stesso.

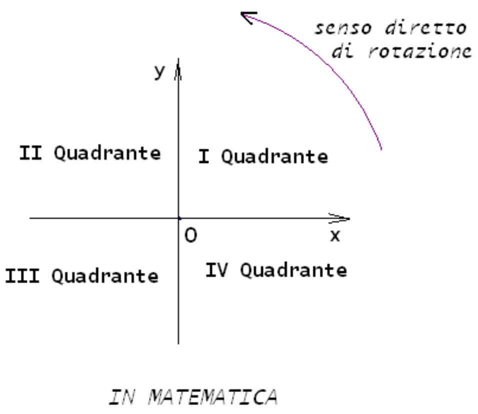


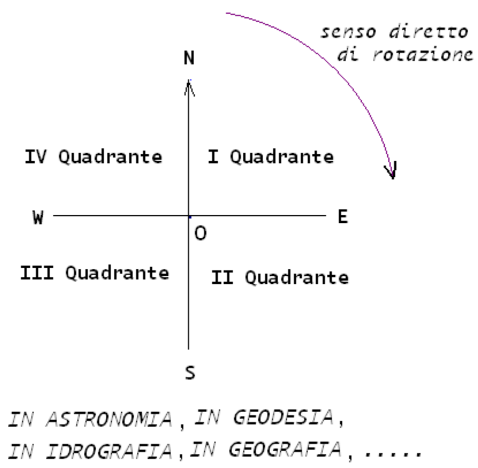
Analogamente per la cotangente: è l'ombra che un gnomone unitario, infisso verticalmente sul piano orizzontale, produce sul piano stesso, quando è investito dai raggi del Sole.

Riporto, sul piano cartesiano O*xy*la circonferenza goniometrica (circonferenza di raggio unitario) dove sono tracciati seno, coseno, tangente e cotangente dell'angolo α:



Dalla precedente figura emerge il senso diretto (antiorario) della misurazione degli angoli; infatti viene evidenziato come si riporta, sul piano cartesiano, l'angolo α: è la parte di piano che viene *spazzata* dal semiasse delle ascisse positive ruotando, nel senso antiorario, fino a prendere, per la prima volta, la direzione OC.
Viene da domandarsi del perché di questa scelta; l'opzione di questo senso è stata voluta dall'ideatore del piano cartesiano: Descartes Renè(La Haye en Tourain 1596-Stoccolma 1650), che introdusse la geometria analitica consentendo lo studio di proprietà geometriche mediante l'uso dell'algebra; questo nuovo pensiero rappresenta un momento fondamentale nell'evoluzione della matematica: è la nascita della matematica moderna.
Ma, molto tempo prima, nell'astronomia, nella geografia, … , il senso diretto adoperato per i calcoli è quello orario. Nelle seguenti figure vengono ben evidenziati i due sopradetti sensi diretti.





Si nota che:

- sul piano cartesiano sono riportati i sensi di crescenza, su ciascun asse, della specifica coordinata, rappresentata da una freccia;
- sul piano orizzontale (geografia, geodesia, topografia,…) è riportata, invece, solamente la freccia nulla direzione NS, nel senso del Nord; questa scelta impone che in qualunque documento di tipo *carta geografica*, *carta topografica*,… sia sempre segnato il verso del Nord.

A questo punto mi domando se non fosse opportuno scegliere un senso diretto comune, e che quindi tutte le parti, col buon senso, arrivassero ad un positivo accordo (al fine di eliminare i disagi provocati agli studenti, dovuti alla scelta dei diversi orientamenti;suggerisco, per esempio, di confrontare la trigonometria rivolta a studenti dei licei con quella rivolta al corso di geometri)

► Ritorniamo sulla trigonometria.
Essa proviene, da memorabile tempo, dagli studi astronomici di Ipparco di Nicea, noto anche come Ipparco di Rodi (Nicea 190 a. C . Rodi 120 a.C.), matematico, astronomo e geografo dell'antica Grecia. E' lui che ha scoperto la precessione degli equinozi.
Delle sue copiose opere ne rimane un solo frammento in campo astronomico dove usa il metodo delle corde degli archi della circonferenza che può essere considerato anticipatore di quello utilizzato nell'attuale trigonometria.
Questi primi passi vengono colti da Menelao (prima citato) che li sviluppa utilizzando inizialmente gli studi degli indiani e successivamente quelli degli arabi. Da questi ultimi apprende la teoria dei triangoli sferici, in particolare dal matematico ed astronomo (ma anche biologo, chimico, fisico e filosofo) persiano Nasir al-Din al-Tusì (1201 – 1274) che porge una esposizione puntuale della teoria sui triangoli sferici.
Gli studi degli arabi entrano in Europa non prima della metà del XV secolo; ed il primo trattato di trigonometria, col titolo "*de triangulisomminimodis libri quinquue*" viene presentato nel 1533 da *Johannes Müller da Königsberg* , noto con lo pseudonimo **Regiomontano**, (1436 – 1476), matematico ed astronomo tedesco.
E' l'inizio dell'era dello sviluppo continuo di questa disciplina che termina nel XVIII secolo.
E, così si susseguono:

- Werner Johannes (Norimberga 1468 – 1528), matematico, astronomo, e sacerdote, è uno dei fondatori della trigonometria moderna . Egli introduce la formule :

a) che vanno sotto il suo nome "formule di Werner" che consentono di trasformare prodotti di funzioni goniometriche di due angoli in somme o differenze di funzioni goniometriche; esempio: $\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$

b) di prostaferesi che consentono di trasformare somme di funzioni goniometriche di due angoli in prodotti di funzioni; esempio : $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$.

Le prime sono usate, per esempio:

1) in radiotecnica per descrivere la formazione delle bande laterali nei segnali di ***M***odulazione di ***A***mpiezza (acronimo ***AM*** dall'inglese *amplitudemodulation*) ,
2) nel calcolo integrale, quando è conveniente avere somme al posto di prodotti.

Le seconde consentivano ai naviganti e agli astronomi di semplificare i calcoli, infatti esse trasformano espressioni non logaritmiche e in espressioni logaritmiche.

Osservazione. I due gruppi di formule prima descritte sono le une inverse delle altre.

- .N. Copernico (1473 – 1543) impiega la secante,
- Georg Joachim Rheticus (1514 – 1574), latinizzato Retico, matematico ed astronomo austriaco, separa la trigonometria sferica da quella piana.

  Tra le tante sventure incontrate nella sua vita (il padre giustiziato per stregoneria; cambio del cognome, assumendo il nuovo Von Lauchen che è quello di sua madre Tommasina de Porris, essendo infatti lauch la traduzione in tedesco della parola porro) trascorse un periodo felice quando si trasferì in Polonia a Frombork, città dove divenne amico di Copernico che ivi trascorse i suoi ultimi anni e dove morì nel 1543.

In questa cittadina sul mar Baltico, Retico studiò la ***teoria eliocentrica*** di Copernico apportandovi validi contributi ma, soprattutto convinse Copernico a pubblicare le sue opere che fino ad allora custodiva, dal 1506, gelosamente nascoste.

- Richter J. (Joachimstal 1537 – Altorf(Norimberga) 1616), matematico ed astronomo, si dedicò, all'inizio, principalmente all'astronomia costruendo validi strumenti astronomici (lasciando di essi alcune documentazioni); successivamente si dedicò alla matematica con particolare attenzione ai problemi trigonometrici.

- Vieta, già citato, risistema tutta la trigonometria piana e sferica…. (vedi storia sfera)
- *Pitiscus Bartholamæus* (1561 – 1613), italianizzato Pitisco, matematico e teologo tedesco, introduce le funzioni inverse arcsin$x$, arccos$x$, arctan$x$ e ne fornisce tavole dei loro valori naturali con eccezionale precisione .Ampliò il libro "*Grande Canone*" di Retico, che pubblicò nel 1613 con il titolo "*Thesaurus Matematicus"*(contiene la tavola dei seni calcolati di $10''$ in $10''$, a 15 decimali).

  Egli visse nell'ultimo periodo della sua vita a Heidelberg, città, situata sulle rive del fiume Neckar, che è sede della più antica università della Germania, fondata nel 1386.

  E' forse il primo a coniare la locuzione trigonometria che compare nella sua pubblicazione del 1595 "*Trigonometria, sive de solutione triangolo rum tractatus brevi set perspicuus*".

- Nel 1614 l'inglese G. Napier (1550 – 1617) introduce i logaritmi che danno un notevole contributo al calcolo trigonometrico.

  Definisce le equazioni goniometriche e presenta le formule che portano il suo nome: le analogie di Nepero.

- G. Bernoulli (1654 – 1705), matematico svizzero, il più importante di una folta famiglia di matematici (due fratelli, tre nipoti e due pronipoti), introduce la trigonometria nell'analisi infinitesimale. Tra i tanti problemi studiati è notoria la legge di Bernoulli:

$$p(k)=p^k(1-p)^{n-k},$$

  la quale porge la probabilità che in un esperimento bernoulliano di n prove, l'evento si

  verifichi esattamente k volte in un prefissato ordine.

- A. de Moivre (1707 – 1783), matematico francese, emigrato in Inghilterra diventò amico di isacco Newton, continua l'opera iniziata da Bernoulli, ed in particolare determina la forma goniometrica della potenza ennesima di un numero complesso:

$$[\rho(\cos\alpha+i\sin\alpha)]^n=\rho^n(\cos n\alpha+i\sin n\alpha)$$

NOTA. Anche se Isaac Newton non viene ricordato particolarmente per studi sulla trigonometria, pensiamo sia doveroso (visti che l'abbiamo prima citato) riportare alcune sue peculiarità. Nasce a Woolsthorpe, nella contea di Lincoln, nel 1642 e muore a Londra nel 1727. Fu valido fisico; a lui si deve la sistemazione della meccanica classica. In qualità di matematico introdusse i concetti di limite, di derivata e di integrale senza fornirne definizioni formali, ma applicandone i risultati a problemi fisici. Riconosciuto, già in vita, uno dei più grandi matematici di tutti tempi, ricevette onori quali la nomina di Governatore della Zecca è della presidenza della Società Reale. Era tenace nello studio tanto da concentrarsi assiduamente, impegnando tutte le sue energie fino alla completa soluzione di un problema. Il matematico e storico Eric Bell (1883.1960) , a riguardo dell'opera principale di Newton (Principia), ebbe a dire " *Newton aveva dimenticato che è necessario all'uomo mangiare e dormire, mentre era sprofondato nella composizione del suo lavoro*". A riguardo si racconta il seguente aneddoto: una sera aveva ospiti a cena; finì il vino, allora Isac disse che sarebbe sceso in cantina a fare rifornimento. Passava il tempo e il padrone di casa non tornava; i commensali pensando ad un malore sopraggiunto improvviso, lo andarono a cercare scendendo le scale verso la cantina. Ma, strada facendo, videro una fievole luce provenire da un ambiente: era lo studio di Newton, dove lui, curvo sulla scrivania, stava scrivendo. Quando Newton vide gli ospiti, sorpreso, disse loro: "cosa fate qui?". Morale della favola: mentre scendeva gli venne in mente un problema e, passando davanti al suo studio, estraniandosi dal mondo che lo circondava, si accingeva a risolverlo.

- L.Eulero (1707 – 1783), svizzero, tra i più grandi matematici di tutti i tempi, presenta la completa sistemazione attuale della trigonometria, apportandovi notevoli contributi ed inserendola anche nel campo complesso, tale da diventare un importante supporto in alcune applicazioni dell'analisi matematica.

  Questo matematico fu eccezionalmente prolifico, tanto che una raccolta incompleta di sue opere, raggiunge il riguardevole numero ottantotto.

  Notorie sono le sue capacità di concentrazione anche nelle più difficili situazioni; si racconta che riuscisse a lavorare anche con più figli attorno che schiamazzavano (ne aveva ben 13).

  Non si perse neppure d'animo quando divenne cieco (aveva solo trenta anni), infatti continuava assiduamente la sua attività di ricercatore scientifico utilizzando una lavagna dove scriveva le formule con un gesso e dettando le spiegazioni ad uno dei figli maggiori.

  E' nota l'identità di Eulero $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, in cui i è l'unità immaginaria ed e è il numero di Nepero., ovvero $e = \lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

  Il numero e è irrazionale trascendente (non può essere soluzione di equazioni algebriche) ed è la base dei logaritmi naturali; approssimato alla dodicesima cifra decimale è

  $e = 2.718281828459$

  Gli americani ricordano facilmente il numero e fino alla nona cifra decimale, perché dopo le cifre 2.7 aggiungono per due volte consecutive le cifre 1828 che rappresentano una data memorabile dalla loro storia; infatti nel **1828** furono presentati alle presidenziali, dal partito Democrtico-Repubblicano, due candidati Andrew Jacson e John Quicy Adams ; il partito si divise in due: coloro che sostenevano il primo dei candidati e quelli (poi chiamati *repubblicani nazionali*) che sostenevano il secondo candidato. Vinse **Andrew Jacson**.

  Il numero e si può determinare, approssimativamente mediante il seguente sviluppo in serie:

$$e = \lim_{n\to\infty}\sum_{0}^{n}\frac{1}{n!} = \frac{1}{0!}+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+.........$$

Al fine di ricordare le prime cifre le prime 13 cifre che formano il numero è, nel 1929, la rivista *sapere*, pubblicò la seguente filastrocca nella quale il numero delle lettere che formano le parole, in quell'ordine, sono le cifre che formano il numero *e*:

la	bambina	è	affamata,	la	minestra	è	squisita,	la	scodella	vien	tosto	terminata
2.	7	1	8	2	8	1	8	2	8	4	5	9