

## CONSIDERAZIONI SULLA III LEGGE DI KEPLERO

► E' noto che **Johannes von Kepler**, matematico, astronomo e teologo tedesco (Weil der Stadt 1571- Ratisbona 1630), latinizzato Giovanni Keplero, in base alle proprie osservazioni, congiuntamente a quelle del suo maestro **Tycho Brahe**, astronomo danese (Castello di Knutstorp 1546-Praga 1601), individuò le tre leggi cinematiche che regolano il moto dei pianeti intorno al Sole; in particolare enunciò le prime due nel 1609 (il suo maestro era già deceduto) e la terza nel 1618.

La terza legge viene enunciata come segue:

*I quadrati dei periodi di rivoluzione dei pianeti sono proporzionali ai cubi delle loro distanze medie dal Sole.*

Indicati rispettivamente con  $T_1$  e  $T_2$  i periodi di rivoluzione e con  $R_1$  e  $R_2$  i raggi di due pianeti  $P_1$  e  $P_2$ , la terza legge si esprime in equazione:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{R_1^3}{R_2^3} \quad (1)$$

OSSERVAZIONE. Le orbite dei pianeti attorno al Sole sono ellittiche, ma hanno piccola **eccentricità** (la massima è 0.249 di Plutone) e piccola **inclinazione** sul piano orbitale della Terra (la massima è  $17^\circ 07'$  di Plutone), per cui si possono approssimare a circonferenze complanari.

Questa legge, enunciata da tutti con grande spavalderia, è veramente sorprendente: analizzata attentamente, si rileva un "affascinante legame matematico" tra "quadrati di tempi" con "volumi".

E che dire se la scriviamo come segue?

$$T_1^2 \cdot R_2^3 = T_2^2 \cdot R_1^3 \quad (2)$$

Ricordando che le dimensioni fisiche, in cinematica, sono lunghezza [L] e tempo [T], ciascuna elevata ad esponente razionale, la dimensione di ciascun membro della (2) è  $[L^3 T^2]$ , e questo è veramente sorprendente.

► Ora, in base alle mie opinioni, cerco di immaginare come avrebbe potuto operare Keplero.

Indicate con  $v_1$  e  $v_2$  rispettivamente le velocità dei due pianeti  $P_1$  e  $P_2$ , posso scrivere (ovviamente considerando con  $v_i$  la velocità media del satellite  $i$ -simo):

$$T_1 v_1 = 2\pi R_1 \quad (3)$$

$$T_2 v_2 = 2\pi R_2 \quad (4)$$

Divido, membro a membro, la (3) con la (4):

$$\frac{T_1 v_1}{T_2 v_2} = \frac{R_1}{R_2}$$
$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{R_1 v_2}{R_2 v_1} \quad (5)$$

quadro ambo i membri della (5)

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{R_1^2 v_2^2}{R_2^2 v_1^2} \quad (6)$$

uguaglio i secondi membri delle (1) e (6):

$$\frac{R_1^2 v_2^2}{R_2^2 v_1^2} = \frac{R_1^3}{R_2^3}$$

semplifico

$$\frac{v_2^2}{v_1^2} = \frac{R_1}{R_2}$$

che posso scrivere:

$$v_1^2 R_1 = v_2^2 R_2. \quad (7)$$

In definitiva è:

$$v_i^2 R_i = \text{costante}, \quad (8)$$

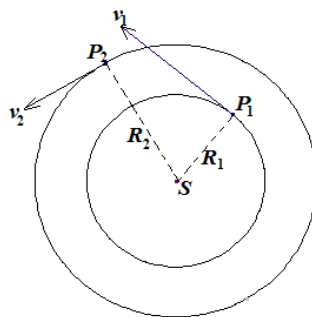
nella quale è  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  dove  $n$  è il numero dei pianeti del sistema solare.

Forse è proprio la (8) che Keplero, con le sue osservazioni, verificò perché mi sembra più facile da provare rispetto alla (1) e quindi, con i passaggi di ritorno prima fatti, ha scritto la sua terza legge.

► Risolvo la (7) rispetto, per esempio, alla variabile  $v_2$ :

$$v_2 = v_1 \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}. \quad (9)$$

Nella figura



sono riportati due ipotetici pianeti  $P_1$  e  $P_2$  che ruotano attorno al Sole  $S$ ; essendo  $P_1$  più vicino al Sole rispetto a  $P_2$ , è:

$$R_1 < R_2 ;$$

pertanto nella (9) è:

$$\sqrt{\frac{R_1}{R_2}} < 1$$

e quindi è:

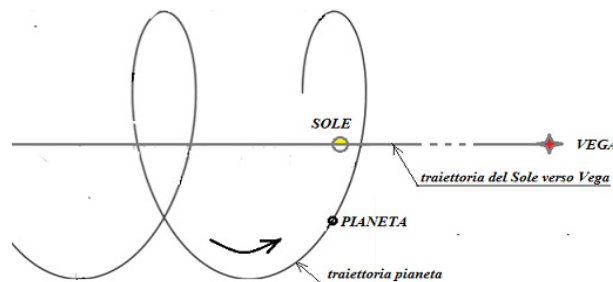
$$v_2 < v_1.$$

Dalla terza legge emerge quindi che le velocità medie dei pianeti, nel percorrere le proprie orbite, diminuiscono all'aumentare della loro distanza dal Sole.

Che la distanza dei pianeti dal Sole abbia rilevanza sul loro moto orbitale già l'avevamo rilevato nella seconda legge: ricordando che il perielio e l'afelio sono rispettivamente i punti più vicino e più lontano dal Sole e avevamo visto che nel primo si ha la velocità massima del pianeta, mentre nel secondo la minima. (vedi "distanza di un pianeta (2)" nella icona "il mare e i numeri" del sito "Società Capitan e Macchinisti-Camogli")

**NOTA.** Le teorie che regolano l'universo sono, in generale, approssimate e così risultano anche le leggi di Keplero, infatti:

- I pianeti non ruotano attorno al Sole; ruotano, assieme al Sole, attorno al baricentro del sistema solare, baricentro che, per la prevalente massa del Sole rispetto a tutti i pianeti del suo sistema, viene approssimativamente considerato, da Keplero, coincidente col baricentro della nostra stella;
- Il baricentro del sistema solare non è fisso, ma si muove continuamente per la continua diversa distribuzione dei pianeti nel sistema stesso;
- I pianeti, inoltre, si attirano mutualmente, con forze continuamente variabili, a seconda delle loro mutue distanze (legge di gravitazione universale); questo fenomeno causa la deformazione delle orbite dei pianeti;
- Infine il Sole non è stazionario bensì si muove nella direzione della stella Vega, trascinando con se tutti i pianeti del suo sistema; la conseguenza di questo moto produce la formazione, per ciascun pianeta, di orbite spiralfornate; pertanto nessun pianeta passerà più di una volta per uno stesso punto dello spazio.



Tempo permettendo, necessita qualche approfondimento sulla "meccanica celeste".